UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ELIANE DIAS MARTINS GUERRA

TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS: UM PROCESSO UTILIZANDO MATERIAL CONCRETO

Campina Grande/PB
2012

ELIANE DIAS MARTINS GUERRA

TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS: UM PROCESSO UTILIZANDO MATERIAL CONCRETO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros

Campina Grande/PB
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

G937t Guerra, Eliane Dias Martins.

Tarefas de investigação matemática com algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras [manuscrito]: um processo utilizando material concreto / Eliane Dias Martins Guerra. – 2012.

96 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2012.

“Orientação: Prof. Dra. Kátia Maria de Medeiros, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Matemática - Aplicações. 2. Investigações Matemáticas. 3. Teorema de Pitágoras. I. Título.

21. ed. CDD 516

ELIANE DIAS MARTINS GUERRA

TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS: UM PROCESSO UTILIZANDO MATERIAL CONCRETO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Aprovada em 22 de junho de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Maria de Medeiros

Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientadora

Silvanio de Andrade

Prof.º Dr.º Silvânio de Andrade
Departamento de Matemática – CCT/UEPB

[illegible]

Prof.ª Drn.ºJosé Lamartine da Costa Barbosa
Departamento de Matemática – CCT/UEPB

A todos aqueles que, orientados por DEUS, contribuíram para a realização desse trabalho em especial a minha Mãe que tanto me incentivou a estudar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por estar presente em todos os momentos de minha vida.

Aos meus pais, Eguinaldo Martins e Maria José, pela força e incentivo para não desistir diante das dificuldades e, principalmente, por terem me ensinado a ser quem eu sou.

A minha irmã, Eliz Regina, pelo carinho, compreensão e por sempre me ajudar quando eu preciso.

A minha tia, Iraneide, por todo o carinho e apoio constantes.

Ao meu noivo, Henrique, pela paciência, compreensão, cooperação e apoio incondicional.

Aos meus amigos pelo apoio constantes. E em especial a Edinete e Simone, que sempre estiveram do meu lado me apoiando e por terem acreditado sempre em meu potencial até mesmo quando eu não acreditava.

Aos meus colegas de curso que durante todo o curso me influenciaram na perseverança diária, superando juntos todas as dificuldades.

A professora Doutora Kátia Maria de Medeiros, orientadora deste trabalho, pelo estimulo, atenção, responsabilidade, incentivos e apoio constantes.

A todos que de algum modo, contribuíram para a concretização deste trabalho.

Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom "resolvedor de problemas", tem que resolver problemas.

(George Polya)

RESUMO

.

Este trabalho pretendeu desenvolver investigações matemáticas em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras que utilizam material concreto para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem, estimulando o raciocínio lógico-dedutivo de cada aluno e a reflexão dos alunos sobre as aplicações deste teorema. E tem como objetivos específicos, oferecer um ambiente de aprendizagem com compreensão em que os alunos proponham, explorem e investiguem demonstrações do Teorema de Pitágoras que utilizam material concreto; descrever como as investigações de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras utilizando material concreto, contribuem para aprendizagem dos alunos; identificar quais as modificações que acontecem na relação professor/aluno com o uso das investigações matemáticas; propor uma reflexão acerca da relevância deste teorema no que se refere às suas aplicações. Para operacionalizar os objetivos da pesquisa, realizamos atividades de investigações matemáticas, utilizando materiais concretos e uma técnica de trabalho em grupo denominada Painel Integrado, numa turma do 1º ano do Ensino Médio, composta de 25 alunos, em uma escola da rede estadual de ensino localizada na cidade de Itatuba no Estado da Paraíba. A Metodologia foi composta por três fases: o Pré-Teste, em seguida foram realizadas cinco atividades de investigações matemáticas de demonstrações do Teorema de Pitágoras, feito através de cinco encontros, com a utilização de materiais concretos e a técnica do Painel Integrado e, por fim o Pós-Teste. Os resultados mostraram que a utilização de investigações matemáticas é relevante para aprendizagem os alunos.

Palavras-chave: Investigações Matemáticas; Teorema de Pitágoras; Material Concreto; Ensino Médio

ABSTRACT

This work wanted desenvolver mathematical investigations in some demonstrations of the Pythagorean theorem using concrete materials to contribute to the process of teaching-learning, stimulating the logical-deductive reasoning of each student and the student's reflection on the applications of this theorem. And specific aims, offering a with understanding learning environment in which students propose, explore and investigate demonstrations of the Pythagorean theorem using concrete material; describe how the investigations of some demonstrations of the Pythagorean theorem using concrete materials, contribute to student learning; identify which changes that happen in the teacher/student with the use of mathematical investigations; propose a reflection on the importance of this theorem with regard to their applications.In order to make the aims of research, we conduct mathematical research activities using concrete materials and a technique called groupware, Integrated Panel in a classroom of the 1st year of high school, made up of 25 pupils in a school of education State network located in the town of Itatuba in Paraíba State of northeastern Brazil. The methodology consisted of three phases: the pretest, then five investigations were carried out activities of mathematical demonstrations of the Pythagorean theorem, done through five matches, with the use of concrete materials and technique of Integrated Panel and finally the test post. The results showed that the use of mathematical research is relevant to students ' learning.

Key Words: Mathematical Investigations; Pythagorean theorem; concrete Material; High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os conhecimentos matemáticos geralmente são trabalhados em sala de aula quase sempre sem aplicações do mesmo à realidade ou as demais ciências, ficando restrito às aplicações dentro da própria matemática, primando assim à busca de saberes teóricos, descontextualizados e fixos, tratando a matemática apenas coma um acumulo de fórmulas. Com isso, surge a necessidade de desenvolver uma aprendizagem Matemática com compreensão para os alunos.

Considerando a proposta de trabalhar a Matemática de forma contextualizada, tendo por finalidade preparar os alunos para utilizá-la em sua vida social e profissional é preciso que o aluno seja o centro do processo de ensino-aprendizagem.

A pesquisa realizada propõe o uso de atividades de investigações matemáticas para contribuir no processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Estas oferecem desafios aos alunos, permitem a elaboração e discussão de diferentes estratégias, permitindo que os alunos possam expor suas ideais, compreender e respeitar as ideias dos outros. Através desse trabalho apresentamos algumas atividades de investigações em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, utilizando material manipulável, fazendo com que o ensino-aprendizagem desse conteúdo ganhe mais significado para os alunos.

As investigações matemáticas permitem aos alunos a formulação de conjecturas e a escolha dos testes adequados para validá-las ou rejeita-las. Admitem ainda que os alunos busquem argumentos que demonstrem as suas conjecturas, resistindo a sucessivos testes e levantando novas questões para investigar. Traduzindo assim o trabalho desenvolvido pelos matemáticos profissionais. Nas atividades com investigações matemáticas, as situações apresentadas aos alunos são abertas, com questões não totalmente formuladas, o que permite um maior envolvimento dos alunos na aula. Por este caráter mais aberto, as investigações matemáticas favorece o envolvimento de todos os alunos, cada um dentro das suas possibilidades.

A relevância deste trabalho justifica-se pelo fato das investigações matemáticas de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras para turmas do 1° ano do ensino médio, desenvolver conhecimentos matemáticos de forma a estimular nos alunos a capacidade de pensar, refletir e entender os fenômenos usando a matemática, além de desenvolver habilidades e estratégias para serem aplicadas em outras áreas do conhecimento, preparando-o para realizar-se como cidadão em uma sociedade submetida a constantes mudanças.

O trabalho realizado foi organizado da seguinte forma: inicialmente, explicitamos os objetivos de nossa pesquisa, em seguida fizemos a Revisão de Literatura, na qual se encontra uma abordagem histórica do Teorema de Pitágoras, abordamos também algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras; o ensino do Teorema de Pitágoras; a apresentação deste aos discentes; as aplicações do Teorema de Pitágoras; os materiais concretos na sala de aula; em seguida, tratamos dos aspectos históricos das investigações matemáticas; além de falar também sobre, atividade e tarefa na aula de matemática, e sobre diferentes tarefas na gestão do currículo e da aula de matemática; as investigações matemáticas na sala de aula vêm seguido dos materiais concretos, a reflexão e as investigações matemáticas; logo em seguida, explicitamos a metodologia; posteriormente, temos a análise dos dados (Pré-Teste, aulas e Pós-Teste); e, finalmente, apresentamos a conclusão.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo geral:

Desenvolver investigações matemáticas em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras que utilizam material concreto para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem estimulando o raciocínio lógico-dedutivo de cada aluno, e a reflexão dos alunos sobre as aplicações deste teorema.

2.2. Objetivos específicos:

- Oferecer um ambiente de aprendizagem com compreensão em que os alunos proponham, explorem e investiguem demonstrações do Teorema de Pitágoras que utilizam material concreto;
- Descrever como as investigações de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras utilizando material concreto, contribuem para aprendizagem dos alunos;
- Identificar quais as modificações que acontecem na relação professor/aluno com o uso das investigações matemáticas;
- Propor uma reflexão acerca da relevância deste teorema no que se refere às suas aplicações.

3. REVISÃO DE LITERATURA

3.1. O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA DIMENSÃO HISTÓRICA

Para Singh (2008) Pitágoras foi responsável pela idade de ouro da Matemática. Graças ao seu gênio, os números deixaram de ser apenas coisas usadas meramente para contar e calcular, uma vez que passaram a ser apreciados por suas próprias características.

De todas as ligações entre a natureza e os números estudados pelos pitagóricos, que eram os membros de uma sociedade mística secreta fundada por Pitágoras, chamada de Escola Pitagórica, em que pensavam muito sobre o mundo, tentando explicá-lo, a mais importante sem dúvida é a relação que hoje é universalmente conhecida pelo nome de seu fundador. O Teorema de Pitágoras nos fornece uma equação que é verdadeira sobre todos os triângulos retângulos, afirma que *o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos*. No entanto, este teorema já era conhecido pelos babilônicos mil anos antes, porém, foi Pitágoras o primeiro a demonstrar que servia para todos os triângulos retângulos. Segundo Singh (2008) a descoberta desse teorema foi um marco na história da Matemática e um dos saltos mais importantes da história da civilização.

Em Bastian (2000, p.19) encontramos que,

> A relação pitagórica despertou interesse de muitos povos antigos, tais como babilônicos, egípcios, gregos, hindus e chineses. Modernamente, parece ter servido de inspiração para um problema que desafiaria matemáticos durante 358 anos: o chamado Último Teorema de Fermat, segundo o qual "não existe solução inteira para a equação $x^n + y^n = z^n$ na qual 'n' é natural maior que 2".

Em Singh (2008) podemos encontrar que a demonstração do Último Teorema de Fermat só se deu em 1995, por Andrew Wiles, que passou muitos anos de sua vida dedicados a provar este teorema.

Os discentes acham que a Matemática é um corpo de conceitos verdadeiros, onde não se duvida nem se questiona nada. A maioria acredita que estes foram descobertos ou criados por gênios de uma hora para outra. No entanto, sabemos que a maioria deles passou por um grande período de estudo. Assim, é necessário que o docente, procurando melhorar a aprendizagem do seu aluno, recorra à História da Matemática como instrumento de motivação para o seu trabalho e esclarecimento para os alunos. Segundo D'Ambrósio (1994, p**.** 61).

> [...] o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito, que está sendo trabalhado. Essas dificuldades históricas têm se revelado as mesmas muitas vezes apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem.

A compreensão dos conceitos matemáticos com o uso da história propicia ao aluno a oportunidade de gerar e criar soluções interessantes para determinadas situações do seu cotidiano, pois eles passam a perceber que estes conhecimentos não foram descobertos, mais sim desenvolvidos ao longo da história por pessoas comuns.

> Ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos de passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (PCN's, 1997, p. 45).

Diante disso, o uso da história do Teorema de Pitágoras pode contribuir para esclarecer ideias que estarão sendo construídas pelos alunos dando respostas aos seus "porquês", contribuindo então para a aprendizagem significativa.

3.2. AS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

No ensino do Teorema de Pitágoras são notórias as dificuldades encontradas pelos alunos no que se refere às aplicações deste teorema como ferramenta na solução de problemas. Faz-se necessário elaborar uma sequência didática composta por situações problemas onde o aluno possa melhorar a compreensão deste teorema, fazendo com que eles o entendam, não apenas com uma simples fórmula, mas sim como uma ferramenta utilizável na resolução de inúmeros problemas de Geometria. O uso da história desde teorema possibilita aos alunos a compreensão de fatos históricos que levaram a sua construção. Neste processo histórico de construção encontramos as demonstrações do teorema. Ao tratar das demonstrações do Teorema, Loomis (apud BASTIA & ALMOULOUD, 2003, p.47) classifica-o em quatro grandes grupos: *algébricas*, baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos; *geométrica*s, baseadas em comparações de áreas; *vetoriais*, baseadas em operações com vetores e empregando o conceito de direção e *dinâmicas*, baseadas em massa e velocidade. Para Padilla (1992, p.12 apud BASTIAN & ALMOULOUD, 2003, p.47) as demonstrações podem ser reagrupadas em três tipos, *segundo o tratamento matemático empregado: em que as áreas dos quadriláteros permanecem invariantes*; *por* *transposição de elementos e algébricas*. Segundo Bastian e Almouloud (2003, p.48) “Na atividade matemática, é usual e frequente a passagem do sistema de representação para outro, como por exemplo, de enunciado para figura, ou a mobilização simultânea de diferentes sistemas de representação durante a resolução de um problema.”. Uma das maiores dificuldades está nesta passagem, uma vez que os alunos não conseguem fazê-las.

No processo de ensino-aprendizagem da Matemática, ainda vemos o grande predomínio de técnicas tradicionais, nas quais o professor é o único detentor do conhecimento, sendo o responsável pela transmissão de conteúdos de forma acumulativa, descontextualizada, abstrata e teórica. No entanto, nas últimas décadas vêm surgindo reflexões sobre o ensino da Matemática que mostram a necessidade de um ensino no qual o aluno seja inserido num ambiente em que ele possa propor soluções, explorar possibilidades, levantar hipóteses e justificar seu raciocínio.

Desta forma, a demonstração do Teorema de Pitágoras com materiais concretos, por meio do quebra-cabeça, é um recurso didático utilizado nesta pesquisa, com a finalidade de contribuir para uma aprendizagem na qual seja dado ao aluno a possibilidade de realizar suas observações, constatações e descobertas, fazendo uso do raciocínio matemático, da visualização e, assim, elaborar um pensamento matemático mais qualificado.

Todavia, a demonstração deste teorema não pode ser dada apenas exclusivamente através da interpretação de atividades de recortar e colar, pois estas não constituem demonstrações completas para a validação do conhecimento matemático. Para isto, faz-se necessário formalizar os conteúdos matemáticos compreendidos.

O estudo por meio das demonstrações permite ao aluno compreender melhor os conceitos e adquirir algumas habilidades. A demonstração é uma prova aceita pela comunidade matemática, está fundamentada em explicações apresentadas numa sequência de enunciados, organizada conforme regras determinadas. As demonstrações do Teorema de Pitágoras permitem aos alunos compreender melhor o conteúdo ensinado. Por isso, a demonstração do Teorema de Pitágoras deve ser parte integrante no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos e habilidades envolvidos neste teorema, estimulando progressivamente o raciocínio lógico-dedutivo de cada aluno. Segundo Mello (1999, p.26) “A demonstração ocupa um lugar central na Matemática, porque é o método de prova que caracteriza essa disciplina no meio das ciências.”.

O método dedutivo implica que somente a razão pode conduzir ao conhecimento verdadeiro. Procedem de princípios conhecidos como verdades, então se estabelecem relações com uma hipótese particular para, a partir de raciocínio lógico, chegar à verdade daquilo que sugere. Para

Imenes (1990, p.32) “[...] pelo o método dedutivo, [...], partindo de alguns conhecimentos, pensando, raciocinando, utilizando as regras da Lógica, concluímos que certos fatos matemáticos são verdadeiros, Matemáticos [...] usam e abusam desse modo de raciocinar.”. O raciocinar dedutivamente permite poder provar a verdade de um fato.

Diante disso, nesta pesquisa também será apresentado aos alunos algumas demonstrações formais deste teorema aos alunos, pois, do ponto de vista didático, a necessidade de resolver problemas é que justifica a demonstração, a qual, numa situação de aprendizagem, o aluno deve ser levado a aprender através de uma prática constante.

Existem cerca de 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras. Veremos a seguir então algumas das demonstrações deste teorema, selecionadas para este Trabalho de Conclusão de Curso: **A Demonstração Hindu**, **A Demonstração de Garfield**, **A Demonstração por Semelhança de Triângulos**, **a Demonstração Bhaskara** e **A Demonstração utilizando a área do semicírculo.**

Demonstração 1 - Hindu

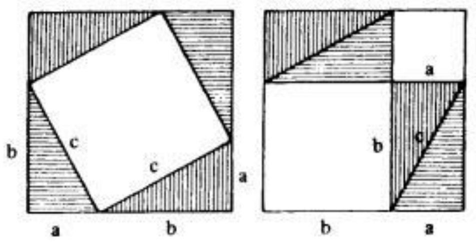


Figura 1 - Demonstração Hindu do Teorema de Pitágoras[1]

Do quadrado que tem a + b como lado, retiremos 4 triângulos iguais ao dado. Se fizermos isto como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado *c*. No entanto, se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados a e b respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b, ou seja: $a^2 + b^2 = c^2$, onde c é a hipotenusa e a e b são os catetos.

[1] Figura retirada da revista da RPM nº 02

Demonstração 2 – Desenvolvida pelo presidente **Garfield,** dos Estados Unidos

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos, durante apenas 4 meses (pois foi assassinado em 1881) era também general e também gostava de Matemática. Ele deu uma prova do Teorema de Pitágoras baseada na figura abaixo:

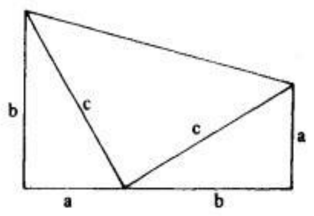


Figura 2 - Demonstração do presidente Garfield[2]

A área do trapézio com bases a, b e altura a + b é igual à semissoma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de 3 triângulos retângulos. Portanto,

$\frac{a+b}{2}(a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$. Simplificando, obtemos $a^2 + b^2 = c^2$, onde c é a hipotenusa e a e b são os catetos.

Demonstração 3 - Semelhança de Triângulos

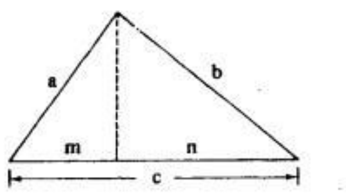


Figura 3 - Demonstração por semelhança de triângulos[3]

É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte consequência da semelhança de triângulos retângulos: "*Num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a*

[2] Figura retirada da revista da RPM nº 02
[3] Figura retirada da revista da RPM nº 02

hipotenusa e sua projeção sobre ela". Assim se *m* e *n* são, respectivamente, as projeções dos catetos *a* e *b* sobre a hipotenusa *c*, temos:

$a^2 = mc$ (I)

$b^2 = nc$ (II)

enquanto m + n = c.

Somando (I) e (II), $mc + nc = c\,(m + n) = c.c = c^2$, vem $a^2 + b^2 = c^2$, onde *c* é a hipotenusa e *a* e *b* são os catetos.

Demonstração 4 – Desenvolvida por **Bhaskara**

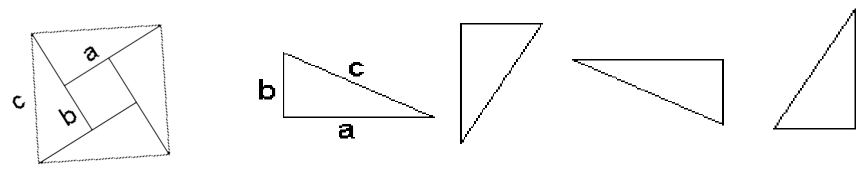


Figura 4 - Demonstração de Bhaskara

O quadrado maior, de lado **c**, é decomposto em quatro cópias do triângulo retângulo e mais um pequeno que mede $(\boldsymbol{a-b})$, logo tem área $(\boldsymbol{a-b})^2$. Cada triângulo tem área igual $\frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{2}}$.

Então: $\boldsymbol{c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2}$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

Demonstração 5 - Utilizando a área do semicírculo

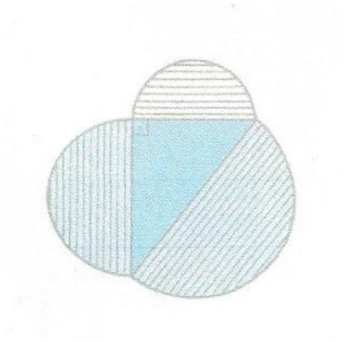


Figura 5 - Demonstração utilizado a área do semicírculo[4]

[4] Figura tirada do site <<http://matprofrenatas.blogspot.com.br/2012/03/demonstracao-do-teorema-de-pitagoras_8765.html>>

Sabendo que π, e os lados do "Triângulo Retângulo" são a (hipotenusa), b e c são os catetos.

A área de um círculo como sabemos, é igual a: $\boldsymbol{\pi(d/2)^2}$, como construímos semicírculos usando como base os lados do triângulo, então vamos dividir a área em duas partes iguais. Logo, a área de um semicírculo é igual a:

$$\frac{\pi(d/2)^2}{2} = \frac{\pi(d/2)^2}{2}$$

Então, temos:

$$\frac{\pi(a/2)^2}{2} = \frac{\pi(b/2)^2}{2} + \frac{\pi(c/2)^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\pi(a/4)^2}{2} = \frac{\pi(b/4)^2}{2} + \frac{\pi(c/4)^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8}$$

Como os "Denominadores" são iguais, podemos simplificar:

$\pi a^2 = \pi b^2 + \pi c^2$

Agora, podemos colocar o "π" em evidência, pois se trata de fator comum:

$\pi a^2 = \pi(b^2 + c^2)$

Dividindo por "π"

$a^2 + b^2 = c^2$

Portanto, através das áreas dos semicírculos, verificação a Relação de Pitágoras.

3.3. O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras é visto como uma das grandes criações na Matemática, porém é possível perceber as dificuldades dos discentes em entendê-lo e aplicá-lo no seu cotidiano. Segundo Bosco (2005, p.55) “a dificuldade da compreensão leva o estudante a memorizar padrões e fórmulas a serem aplicadas na resolução de questões”. Desse modo, faz-se necessário um estudo deste teorema de forma significativa.

No que diz respeito a esta Matemática com significado, os PCN's (1997) enfatizam que identificar estes conhecimentos matemáticos ajudam a compreender e transformar o mundo a sua volta, para Santalo (2001, p.11):

> A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto que dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para seu desempenho, com comodidades e eficiência no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade.

Nessa concepção de aprendizagem, o estudo das aplicações do Teorema de Pitágoras tem fundamental importância, pois a partir de sua utilização os alunos ampliam sua concepção sobre o que é e para que aprender este teorema, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias adquirindo estratégias de resolução de situações-problemas, desenvolvendo a capacidade de fazer Matemática para a realidade.

Segundo Berlinghoff e Gouvea (2010) a aprendizagem sem compreensão leva o aluno a esquecer com facilidade o teorema, pois em vez de aplicá-lo, apenas memorizam. Para os autores, o teorema é extremamente importante sendo um dos resultados mais utilizados na geometria elementar, tanto na teoria quanto na prática.

Portanto, o teorema de Pitágoras deve ser estudado nas aulas de Matemática de forma significativa e aplicado ao cotidiano.

3.4. APRESENTAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS AOS DISCENTES

O uso de materiais concreto na apresentação do Teorema de Pitágoras contribui para o aluno perceber as características necessárias do mesmo, fazendo que conjecturem sobre sua forma. Ao falar do uso do material concreto nas aulas de matemática, Rêgo e Rêgo (2006, p.43) afirmam que:

> [...] o material concreto tem fundamental importância, pois, a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam sua concepção sobre o que é como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos.

Desta forma, o uso dos materiais concretos estimulam os alunos a aprender. Não um "aprender" mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e nem porque faz, mas um aprender do qual o discente participe compreendendo, raciocinando e reelaborando o saber historicamente produzido, superando as dificuldades do ensino-aprendizagem da Matemática. O PCNEM (2002, p.111) destaca que,

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Então, após a apresentação do Teorema de Pitágoras com material concreto, o aluno pode prosseguir para uma abstração, a partir daí usá-lo para exercitar a “apreensão operatória” em problemas que exijam a aplicação do teorema em situações de sua vida cotidiana. Desta forma, resolver um problema não significa apenas compreender o que foi proposto de dar a resposta aplicando fórmulas, mas sim despertar, principalmente, uma atitude de investigação nos alunos diante do que está sendo explorado.

3.5. AS APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Para fazermos aplicações em matemática começamos com uma situação retirada do cotidiano que desejamos entender ou atuar sobre ela, então tentamos “matematizar” a situação, ou seja, examiná-la construindo uma sequência de modelos matemáticos e observar o que podemos aprender sobre a situação. Formular então um problema matemático que contenha a essência da situação original onde possamos trabalhar nele usando qualquer raciocínio matemático adequado, com isto os alunos aprendem a matemática com compreensão.

O professor deve propor aos alunos problemas que seja caracterizado pela investigação e exploração de novos conceitos. Para Pollack (1999) esta atividade matemática é super valiosa que precede o lançamento de qualquer número em uma folha de papel, pois com o uso das aplicações matemáticas os alunos podem explorar diversas variantes apresentando critérios diferentes que podem levar os alunos a adquirir confiança para usar a matemática de forma significante.

Lidar com aplicações da Matemática em sala de aula é excitante e revigorante, pois desenvolve a capacidade matemática que estimula o crescimento intelectual de cada aluno, tem um impacto enorme sobre eles nas respostas dos seus “por quês”. Deve se levar em conta que, para o estudo por meios de aplicações, é necessário um currículo bem estruturado com objetivos matemáticos específicos. Para Ames (1997, p.12) as aplicações é um instrumento poderoso que fornece uma multiplicidade de abordagens que podem ser muito compensadoras. Ainda segundo a autora:

> Lidar com aplicações proporciona uma boa diversificação no sentido de que pode atrair alguns alunos que de outro modo pouco conseguiriam, e muitas vezes altera a hierarquia do grupo. As aplicações são compensadoras no sentido de que elas desenvolvem potencialidades e revelam fraquezas de uma maneira diferente das outras abordagens.

As aplicações criam um envolvimento maior dos alunos no saber matemático. As discussões em grupo levam os alunos a introduzir suas próprias experiências e manifestar as suas próprias observações sobre as situações trabalhadas em sala de aula.

O Teorema de Pitágoras é muito importante é um dos procedidos mais empregados na geometria elementar, tanto teoricamente como na prática. Na prática podemos citar alguns exemplos mencionados por Araujo (2011, p.10-11), dentre eles temos:

> Para construir uma casa, além de todo planejamento inicial, deve-se marcar o de acordo com a planta. Em geral, as paredes devem estar esquadrejadas (formar cantos com ângulos retos). Porém como marcar esses ângulos retos? O homem egípcio já conhecia que a terna pitagórica 3, 4 e 5 e que esse trio formava um triângulo retângulo. Logo esticava uma a corda, conforme a figura, e marcavam se os ângulos retos. Assim, mesmo não conhecendo formalmente o Teorema de Pitágoras foi possível construções como as pirâmides do Egito entre outras.

Podemos citar também,

> Em meados do século passado ninguém podia ver, por exemplo,transmissões de jogos ao vivo. Se um aparelho de TV estivesse a mais de 100 km da estação transmissora não conseguia captar as imagens devido o fato de a terra ser curva. Os sinais eram transmitidos e perdiam-se no espaço. Atualmente, é possível assistir jogos transmitidos ao vivo de qualquer ponto do planeta terra. Isso é possível graças ao grande avanço da ciência em especial das leis de Kepler que descrevem as órbitas dos planetas. Com esses conhecimentos foi possível desenvolver foguetes, satélites que giram em torno da terra para onde os sinais de TV são transmitidos e de lá reenviados para qualquer canto do planeta. Todas essas descobertas científicas e tecnológicas foram possíveis graças aos conhecimentos de geometria sobre triângulos, em especial, sobre triângulos retângulos e, consequentemente, a Pitágoras.

Além disso, temos aplicações teóricas dentro da própria matemática, Berlinghoff e Gouvea (2010, p.148).

> Uma fórmula bem conhecida da geometria cartesiana também segue diretamente desse teorema: a distância dentre dois pontos com coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

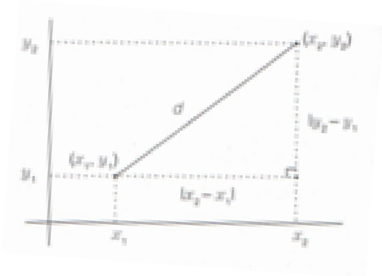


Figura 6 - Aplicação do Teorema de Pitágoras[5]

3.6. OS MATERIAIS CONCRETOS NA AULA DE MATEMÁTICA

Os materiais concretos são elementos que podem ajudar na mediação do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Podem ser excelente incentivador para o aluno construir seu saber matemático. No entanto, para que o uso do material seja eficiente é necessário que o professor tenha clareza dos objetivos que deseja alcançar. A sua utilização não deve ser restrita à manipulação de forma apenas recreativa. Faz-se necessária uma ação na qual o professor seja um mediador da relação de construção do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. È imprescindível que seu uso esteja ligado a objetivos bem determinados para que possam contribuir de modo positivo na aprendizagem Matemática

Os materiais concretos podem agir negativamente na aprendizagem, se houver uma distância entre eles e a relação Matemática que se deseja alcançar. Além disso, para que seu uso seja eficaz para a aprendizagem é de suma importância saber como utilizá-los. Um ponto importante para Matos e Serrazina (1996), é que o uso do material concreto só se justifica se ocorrer uma verdadeira ação dos alunos no que diz respeito à construção dos conceitos matemáticos e não uma reprodução da fala do professor ou da sua prática.

Bons materiais, além de serem motivantes, devem favorecer a construção de conceitos matemáticos, além de proporcionar meios que possibilite a capacidade de abstração dos alunos, pois só a manipulação dos materiais não garante aprendizagem, mas para que de fato ela aconteça é necessária uma atividade mental dos alunos.

Lorenzato (2006) também destaca que os materiais serão mais benéficos, quando for dada ao aluno a oportunidade de manuseá-los, do que quando o professor apenas o utiliza para ilustrar o assunto dado. Para o autor, de posse do material, o aluno pode fazer suas observações e reflexões de

[5] Berlinghoff e Gouvea (2010, p.148)

forma mais vantajosa, uma vez que eles mesmos poderão, a seu ritmo realizar suas descobertas e, mais facilmente, memorizar os resultados obtidos durante as atividades.

Os materiais concretos podem ser utilizados pelo professor e pelos alunos no Laboratório de Matemática. As ideias em torno do que se espera de um Laboratório de Matemática são muitas. É um ambiente criado para a construção coletiva de conhecimentos matemáticos nos quais os recursos didáticos "criam vida". Com este espaço, professores podem dinamizar e enriquecer suas aulas, tornando o processo de aprender mais prazeroso e eficaz dando vazão a criatividade dos alunos.

Na implantação de um Laboratório de Matemática deve se levar em conta o ambiente e o nível dos alunos para direcionar as atividades, dentre elas temos manipulações de materiais concretos, jogos matemáticos, resoluções de problemas (situações-problema), atividades coletivas entre outros. No uso de jogos matemáticos o ensino-aprendizagem se torna mais dinâmico possibilitando trabalhar a Matemática de forma atrativa e desafiadora, visando uma maior interação e integração do discente no convívio social. Além disso, trabalhar num Laboratório significa manipular materiais concretos, pois eles possibilitam a assimilação de conceitos sem a preocupação de manipulação de técnicas, propiciando, assim, a evolução do pensamento dos discentes. Para Medeiros (2003) os materiais concretos assumem um papel de intermediário entre a realidade o os modelos matemáticos, porém, é necessário frisar que a utilização desses materiais deve este ligado a objetivos claros para que não assumam um papel negativo.

A utilização do Laboratório de Matemática pode trazer grandes contribuições para melhorar o ensino-aprendizagem da Matemática. No entanto, caso ainda não exista este espaço na escola, uma realidade, infelizmente, muito comum em escolas públicas no Brasil, os materiais concretos podem ser trabalhados na sala de aula. Desse modo, não podemos justificar a ausência dos materiais concretos na aula de Matemática.

3.7. ASPECTOS HISTÓRICOS DAS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Até as décadas de 60 e 70, o ensino da Matemática, na Europa, nos Estados Unidos e no Brasil entre os anos 70 em metade dos anos 90 quando surgiu os Parâmetros Curriculares Nacionais, recebeu grandes influências do movimento conhecido como "Matemática Moderna", onde o ensino era totalmente voltado para o desenvolvimento elevado da abstração, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizava a Teoria dos Conjuntos, pretendia-se oferecer aos alunos uma melhor visão das ideias matemáticas e, também melhorar as suas habilidades de cálculo, era mais enfatizada a teoria do que a prática. No entanto, no decorrer do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, percebeu-se a inadequação de determinados princípios desta matemática voltada para a abstração; ocorreram, então, novos debates curriculares, que promoveram mudanças no campo da Matemática em nível mundial. Nessas mudanças, segundo Zorzan[6] (2007, p.79)

> [...] evidenciam-se a ênfase na resolução de problemas, a exploração da matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano, a compreensão da importância do uso da tecnologia, o direcionamento para a aquisição de competências básicas ao cidadão e a ação do aluno no processo da construção do conhecimento.

Ainda, segundo a autora, "essas ideias possibilitaram a reflexão, a sinterização de concepções e a constituição de propostas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, inclusive no Brasil". Foi a partir dos anos 80, com lançamento do livro do ano (Yearbook), do NCTN (National Council of Teachers of Mathematics) que a resolução de problemas tornou-se uma tendência no ensino da Matemática, defendida internacionalmente.

Diante disso, a resolução de problemas está no alicerce das novas direções curriculares que se afirmam nas décadas de 80 e 90 no cenário internacional. Onuchic (1999, p.203) destaca que, "O ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya[7], nos Estados dos Unidos [...].". Ponte (2003, p.14), completa destacando que:

> Esta noção (resolução de problema), embora frequente na literatura educacional desde o início do século, foi teorizada e aprofundada por Pólya (1945) como um aspecto essencial da actividade matemática. A ideia fundamental deste autor é que, para aprender Matemática, não basta ao aluno fazer exercícios. É preciso desafiá-lo com problemas interessantes, de modo a ter uma experiência matemática genuína, semelhante à dos matemáticos.

Deste modo, a resolução de problemas admite um papel fundamental na formação do currículo. Contudo, é pertinente destacar que a vários tipos de problemas, com diferentes propósitos e interesses. O interesse pelos tipos de problemas abertos é suscetível a da origem a atividades de investigações matemáticas, pois situações abertas, onde as questões não estão inteiramente estabelecidas, admitem que o aluno se envolva na atividade desde o inicio.

[6] Doutora em Educação – PUCRS, professora da Universidade Federal Fronteira Sul.
[7] Autor de vários livros dedicados à resolução de problemas, sendo um dos mais famosos "*How to solve it"*, traduzido como "*A arte de resolver problemas"*.

Lakatos[8] licenciado em Matemática, Física e Filosofia em seu livro *Provas e refutações: A lógica da descoberta matemática* (1976) expôs uma percepção da Matemática de uma forma distinta daquela do empirismo lógico. Na sua visão, a Matemática não surge como um estado de verdades eternas. Ele mostra como os próprios enunciados e provas matemáticas estão sujeitos à crítica e revisão. Destaca que, na filosofia formalista da Matemática, não há espaço para atividades de descobertas, em seu trabalho apresenta a seguinte ideia:

> (…) é de estudar em detalhe a tese segundo a qual as matemáticas não formais, quasi-empíricas, não se desenvolvem por um acrescento contínuo de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas na refinação incessante das conjecturas graças à especulação e à crítica, graças à lógica das provas e refutações (LAKATOS, 1984. p. 5, apud BROCARDO,2001, p.89).

Segundo Brocardo (2001, p.89-90)

> Na perspectiva de Lakatos, dentro da comunidade matemática, assumem particular realce os processos criação e descoberta, a tomada de decisões e a negociação de sentido**.** A Matemática é um produto do pensamento humano, é uma construção social, falível e impregnada de valores. A filosofia de Lakatos influenciou vários educadores matemáticos que defendem que, para perceber o que é a Matemática, é necessário ter em conta o que os matemáticos fazem, ou seja, olhar para a Matemática como uma actividade e que esta perspectiva tem que necessariamente orientar o ensino da Matemática.

Portanto, a atenção que hoje é atribuída às tarefas de investigações no ensino da Matemática, teve como ponto de partida a grande importância dada na resolução e na formulação de problemas. As tarefas de investigações podem prover para os alunos situações onde elas possam compreender a necessidade de formular e justificar suas conjecturas expressando e seu raciocínio.

Nas últimas décadas há uma crescente valorização de atividades de investigação, em programas de Matemática de alguns países e em documentos de referência, entre eles o NCTN (National Council of Teachers of Mathematics) e no Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). É frequente que o termo investigação não apareça explicitamente, mas as direções apontam para a realização de atividades que se ajustam perfeitamente com a atividade de investigação.

Em Ponte et al (1999, p.01-02) desta algumas considerações sobre a evolução de investigações matemática no currículo de alguns países, diz que:

---

[8] LAKATOS. I. **Preuves et réfutations: Essai sur la logique de la découverte mathématique**. Paris: Hermann. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1968), 1984.

> O trabalho investigativo recolhe uma atenção significativa nos currículos de Matemática de diversos países como Inglaterra, França e Portugal e também nos documentos curriculares norte-americanos, nuns casos de modo mais explícito e noutros de modo mais difuso (Ponte et al., 1999). Assim, o programa francês, sublinha a importância de habituar os alunos à actividade científica, com referência clara ao processo de descoberta. O currículo inglês inclui aspectos directamente relacionados com o trabalho investigativo numa das suas grandes áreas de objectivos ("using and applying mathematics"). O programa português do ensino básico contempla esta perspectiva quando se refere à realização de actividades de exploração e pesquisa ou à elaboração de conjecturas pelos alunos. Por seu lado, o do ensino secundário inclui mesmo sugestões concretas para a realização deste tipo de trabalho.

Com relação às investigações no Brasil, Trindade (2008, p.65) destaca que os PCN, "embora não faça referência ao termo "Investigações Matemáticas", explicita diretrizes curriculares, apontando um ensino da Matemática, tendo como meta e meio, a Resolução de Problemas, com orientações tais que nos fazem enxergar Investigações Matemáticas.".

As investigações matemáticas são atividades que levam os alunos a experimentarem um modelo de aprendizagem em que possam atuar sobre eles, trabalhando de modo produtivo.

3.8. ATIVIDADE E TAREFA NA AULA DE MATEMÁTICA

Em todos os níveis de ensino da Matemática o trabalho com exercícios ainda ocupa um lugar central. Numa aula "normal" podemos encontrar o professor fazendo uso de um ou mais exercícios na continuação de explicações e demonstrações de procedimentos que estão ligados a um exemplo, que serve de modelo. A atividade da aprendizagem está limitada ao treino e a prática de conceitos e procedimentos previamente descritos este modelo de ensino-aprendizagem leva os alunos a verem a Matemática apenas como uma coleção de diferentes tipos de exercícios.

O ensino da Matemática pode ser desenvolvido da forma atual, mas a maior prioridade deve ser dada às etapas do processo educacional em que os alunos estão envolvidos em atividade e possam explorar e resolver problemas ou investigações matemáticas, além de poderem trabalhar sozinhos e em grupo. Neste sentido, é preciso esclarecer o que é tarefa e o que é atividade. Christiansen e Walther (1986) afirmam que:

- Atividade é um meio organizador no ensino da matemática segundo objetivos e intenções.
- Tarefa é um conjunto de passos relacionados aos procedimentos que os alunos executam.

Para Ponte et al (1997, p.02-03),

> As tarefas matemáticas em que os alunos se envolvem — problemas, investigações, exercícios, projectos, construções, aplicações, produções orais, relatórios, ensaios escritos, etc. — proporcionam o ponto de partida para o desenvolvimento da sua actividade matemática. As tarefas devem despertar curiosidade e entusiasmo, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições.
> A actividade, que pode ser física ou mental, diz respeito ao aluno. Refere-se àquilo que ele faz num dado contexto, podendo incluir a execução de numerosos tipos de acção. Pelo seu lado, a tarefa constitui o objectivo de cada uma das acções em que a actividade se desdobra e é basicamente exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). As tarefas são, na maior parte das vezes, propostas pelo professor; mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a actividades muito diversas (ou a nenhuma actividade), conforme a disposição do aluno e o ambiente de aprendizagem da sala de aula.

O professor precisa relacionar as suas explicações aos processos de trabalho dos alunos em tarefas ajustadas a eles. Assim, as tarefas e as atividades estabelecem uma articulação entre o professor e o aluno.

Para Christiansen e Walther (1986, p.06),

> Novas exigências que requerem mudanças no papel e ação do professor estão especialmente ligadas a: (1) mudanças na distribuição da ênfase nos diferentes tipos de atividades; (2) mudanças nos tipos de ações dos professores e na sua sequenciação no processo de ensino; e (3) mudanças nas formas pelas quais o professor serve de mediador de sentido matemático.

A Educação Matemática torna-se, segundo estes autores, evidentemente, complexa quando o ensino é visto como um processo de interação entre o professor-aluno e entre os próprios alunos em que o professor busque proporcionar aos alunos o acesso ao conhecimento e capacidades matemáticas, ajustadas às suas intenções, influenciada pelos fatores sociais vividos pelos alunos.

No ensino de Matemática, afirmam os autores, o conhecimento e o saber-fazer sempre foram objetivos socialmente constituídos. Em todas as sociedades sempre houve divergências entre a Matemática pura, concebida por matemáticos, e a matemática escolar, disciplina ensinada na escola, ambas são socialmente instituídas de maneiras diferentes. Segundo Christiansen e Walther, (1986, p.08) “as suas relações encontram expressão em manuais e livros de exercícios e constituem tema fundamental no debate didático”. As maneiras como o professor consideram e atuam nestas relações depende de vários fatores, incluem não apenas as experiências matemáticas, mas também suas concepções sobre a matemática, o ensino e a aprendizagem. Além disso, na preparação e identificação da tarefa, o professor deve estar atento quanto ao uso de tarefas prontas tiradas de livros didáticos ou de outros recursos, pois estes podem reduzir a investigação pessoal que o professor faz ao criar exercícios e problemas que levem os alunos ao conhecimento da Matemática.

As relações entre tarefa e aluno é uma ferramenta indispensável para ser usada pelo professor nas decisões de qual atividade usar, se individual ou em grupo numa tarefa. E a interação entre professor-aluno é um dos fatores mais importantes, pois uma atividade que não é iluminada pela clareza que o professor tem desta relação, não assegura a aprendizagem que se pretende, ela é condicionada às ações do professor.

Os autores supracitados, afirmam que há três tendências que influenciam o ensino-aprendizagem da Matemática desde os anos 70 do século XX: de início, um pré-requisito para uma aprendizagem 'significativa' de qualquer parte da Matemática escolar é o próprio *envolvimento pessoal* e as reflexões individuais acerca dos aspectos e relações essenciais em questão. Outra tendência aborda que *a ênfase* deve ser colocada não só nos resultados do processo de trabalho matemático na forma de teoremas e fórmulas e na aplicabilidade destes resultados, mas também *no próprio processo* de trabalho em si. E por último, relata que *o ensino da Matemática* não só como instrução, mas como *um longo processo de interações*, no qual os professores funcionam na maior parte dos casos como mediadores, que favorecem e encorajam o conhecimento partilhado na sala de aula – no conhecimento da Matemática objetificada.

Um aspecto essencial da atividade matemática é que ela deve ser orientada para um objetivo. É um processo iniciado e interpretado na expectativa de um motivo. Na realização de diferentes atividades, uma ação específica pode servir para dar inicio a diferentes objetivos, estas ações procede de um estado inicial para um estado final, por isto é necessário um plano, pois através deste o professor deixa claro os objetivos que deseja alcançar com determinada atividade. As ações, segundo Christiansen e Walther (1986), podem ser:

- *Preparatórias:* que estabelece condições para realização da ação intencionada;
- *De observação e reflexão:* que desenvolve e constrói as informações necessárias para o desempenho das ações; de salvaguarda que assegura que os resultados mediadores estão disponíveis para um uso futuro nas ações;
- *De controle:* que confronta fins e ações com os resultados obtidos com as ações desempenhadas, e correlativas que remove os erros.

Ainda segundo os autores, qualquer ação exibe dois aspectos, o intencional que expressa seu caráter objetivo, e o operacional que exprime sua dependência com condições essenciais no objeto sobre a qual a ação opera. A atividade é estruturada pelas condições essenciais ao sistema de motivos e objetivos e pelas condições internas e externas do sujeito em ação.

Tendo em vista a aprendizagem e desenvolvimento intelectual dos alunos, as ações citadas devem se tornar estratégias cognitivas que apoiem os mesmos na solução de problemas específicos. Ao longo do tempo, estas estratégias devem adquirir uma postura de esquema para aprendizagem, que deve ser reconhecida pelos alunos desenvolvendo uma aprendizagem autossuficiente e independente.

Gerar condições que permitam ao aluno adquirir um significado pessoal diante da atividade dada torna-se uma fonte de auto-desenvolvimento intelectual dos mesmos. Na exploração de uma dada tarefa, cabe ao professor estar consciente das diferentes dimensões da aprendizagem e então motivar os alunos na aquisição de conhecimentos específicos e o saber-fazer partilhado com outros. Esta aprendizagem intencional compreende processo e produto como aspectos que se completam, beneficiando ações dirigidas para o fim desejado, que seja o aprender dos alunos. Comprende-se, segundo os autores supracitados, que os caminhos educacionais adotados pelo professor durante o processo de ensino servem para desenvolver a personalidade do aluno, no sentido de que o iniciam e guiam a sua atividade pessoal.

> O desenvolvimento das capacidades mentais pode ser ilustrado por uma espiral: o aluno pode somente adquirir conhecimentos e saber-fazer se o seu desenvolvimento mental (o desenvolvimento do seu conhecimento, saber-fazer, e capacidades – incluindo os seus esquemas de aprendizagem) atingiram um nível correspondente. E, conversamente, as novas condições internas estabelecidas através de processo constituem o fundamento para a aquisição de conhecimentos e saber-fazer a um nível mais elevado. (CHRISTIANSEN & WALTHER, 1986, p. 30).

Os caminhos utilizados pelo professor na Educação Matemática devem ter como objetivo principal a aprendizagem. Esta aprendizagem precisa, além da participação do professor, ter também o acompanhamento dos pais e dos próprios companheiros de sala em atividades realizadas em grupo.

A necessidade de novas ferramentas no ensino de Matemática é claramente observada e o uso de resoluções de problemas é um dos caminhos a ser seguido.

Segundo os PCN’s (1997, p.33), ”A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.”

Nesta linha surgiu a proposta de propor problemas aos alunos que desenvolvesse novos conceitos matemáticos. Apareceram então várias propostas interessantes como o uso de problemas de investigação, o uso da modelagem, que poderiam ser resolvidos em grupo ou individualmente. Com uma posição diferente quanto ao tipo de atividade a serem sugeridas aos alunos, modifica-se a dinâmica da sala de aula, com a resolução e análise das soluções para problemas abertos os alunos podem reconhecer e aplicar o raciocínio dedutivo e o indutivo, validando seu próprio pensamento.

Mendes (2009, p.74 à 75) destaca que "o envolvimento dos alunos com problemas reais e abertos favorece o desenvolvimento [...] (mental e simbólico) e a busca da formulação matemática das situações-problemas, bem como as possíveis representações e soluções para o problema.".

A linguagem empregada pelo professor tem um papel fundamental na mediação das relações entre professor/aluno. Tal linguagem deve ser usada em todas as fases do processo de ensino-aprendizagem, na iniciação, na motivação e na mediação da atividade em questão. Assim, o professor assegura que as ações se tornem acessíveis para o debate aberto na sala, possibilitando um processo de negociação que contribui para um desenvolvimento da capacidade de comunicação e cooperação dos alunos.

3.8.1. Comunicação e Normas Sociomatemáticas na Aula de Matemática

Para se aprender Matemática, segundo Cândido (2001) é necessário que se tenha comunicação, pois é através dos recursos de comunicação que as informações, os conceitos e as representações são veiculados entre as pessoas. A aprendizagem possibilita o individuo fazer conexões e associações entre diversos significados. Neste sentido, a comunicação é um recurso que ajuda o aluno a estabelecer conexões entre suas concepções naturais e o que esta aprendendo de novo, promovendo, então, uma aprendizagem significativa.

A forma como o professor vê a Matemática influencia as interações em sala de aula. Se o professor a vê como um conjunto de procedimentos, através da interação fará com que os alunos compreendam e realizem procedimentos. Mas se ela é vista como uma disciplina dinâmica, as interações serão mais abertas, proporcionando a exploração, as discussões e expressões escritas dos processos de pensamento dos alunos e suas conclusões.

Para Matos e Serrazina (1996), há três formas como o professor vê a si próprio; uns se veem como *fornecedores de infor*mações, onde seu modelo de interação é expor determinada situação e o aluno o captar a informação que está a ser dada; outros, como *um mediador entre a disciplina e o aluno*, e seu modelo de interação é explicar, tornar a disciplina mais clara para os alunos; e por último, os que se veem como *professor co-explorador* que permite aos alunos ter mais autonomia na situação de aprendizagem e explora mais o aspecto da disciplina com eles. Diante disto, podemos dizer que os fatores que influenciam os professores dependem de que forma eles veem o ensino-aprendizagem desta disciplina.

Através de alguns estudos já realizados, sabemos que os alunos aprendem mais quando estão envolvidos no processo de aprendizagem, em vez de serem apenas receptores de informações. No que diz respeito à interação em sala de aula um aluno que tem confiança na sua capacidade de fazer matemática, consegue assumir riscos para tentar resolver as situações propostas, questões abertas podem estimular autoconfiança dos alunos, pois estas têm mais do que uma resposta. Um outro aspecto que influencia o comportamento dos alunos na aula é como ele atribui o seu insucesso, se eles acreditam que seu sucesso depende dos seus esforços, acreditam que sua falha é devido a sua falta de esforço.

Segundo Matos e Serrazina (1996), a visão que os alunos têm da matemática influencia como eles participam das aulas. Se eles a veem como um conjunto de regras, estarão menos disponíveis para questionar, explorar ou conjecturar, espera que lhes seja dito que regra para depois a aplicarem em problemas semelhantes. Mas se por outro lado, eles a verem como uma disciplina dinâmica é provável que sejam mais questionadores.

A comunicação na sala de aula é a raiz da aprendizagem, para Matos e Serrazina (1996) ela e distinguida em quatro, que suscitaremos a seguir:

- *Expor*: É normalmente usada para introduzir novos conceitos. A exposição tem sido há muito tempo um ingrediente fundamental nas aulas de Matemática. O problema surge quando a exposição é a única forma de interação na sala de aula, controlando o acesso dos alunos às ideias e técnicas;
- *Explicar*: Utiliza palavras e ideias já familiares aos alunos operando no mundo deles, com a finalidade de ajudar o aluno a ter mais certezas sobre o seu uso e o significado dos conceitos aprendidos. Além disso, pedir que os alunos que expliquem por escrito o seu raciocínio e as suas descobertas é um aspecto que melhora a sua capacidade de comunicação oral e escrita;
- *Conjecturar*: É uma forma de dizer algo que se acredita ser verdadeiro, mas de uma forma que se mostra está aberto modificações;
- *Questionar*: O questionamento por parte do professor encoraja os alunos a refletir seu próprio pensamento.

Cândido (2001) argumenta que para esta aprendizagem acontecer de forma significativa e relevante, ela deve possibilitar relações com experiências anteriores, com suas vivências pessoais, dando espaço para formulação de problemas desafiantes que incentivam os alunos a aprender mais.

Assume-se que aprender possui um caráter dinâmico, o que requer um ensino voltado para os discentes aprofundar e ampliar conhecimentos que adquirem durante atividades de ensino e aprendizagem. Nessa visão, Cândido (2001, p.16) destaca que “o ensino é um conjunto de atividades sistemáticas, cuidadosamente planejadas, nas quais o professor e o aluno compartilham parcelas cada vez maiores de significados [...].”.

De acordo com a autora, para promover a comunicação em sala de aula é preciso oferecer aos alunos a possibilidade de organizar, explorar e esclarecer seus pensamentos. A oralidade é um recurso de comunicação acessível que todos os alunos podem usar. É um recurso de comunicação simples, ágil e direto que permite revisões rápidas podendo ser reiniciada quando se perceber uma falha ou inadequação.

Para Cândido (2001, p.17) “oportunidades para os alunos falarem nas aulas faz com que eles sejam capazes de conectar sua linguagem, seu conhecimento e suas experiências pessoais com a linguagem da classe e da área do conhecimento que se esta trabalhando.”. O desenho também é uma forma de comunicação este permite uma reflexão sobre a atividade trabalhada, os alunos refletem sobre suas ações e mostram se aprenderam e assimilam os aspectos mais relevantes de uma determinada tarefa. Outra forma de comunicação é a escrita, ela é um recurso que possui duas características distintas. A primeira delas é auxiliar o resgate a memória, já que muitas discussões orais podem ficar perdidas sem o registro em forma de texto. A segunda característica é possibilitar a comunicação à distância no espaço e no tempo e, assim trocar informações com qualquer pessoa. Escrever em matemática ajuda a aprendizagem, encorajando a reflexão, clareando as ideias e agindo como um catalisador para discussões em grupo ajuda os alunos a aprenderem o que esta sendo estudado.

O trabalho em sala de aula tem grande importância no processo de ensino e aprendizagem, pois é nesse espaço que os alunos podem trocar experiências é nela que o professor observa seus alunos, suas conquistas e suas dificuldades. Na classe há algumas formas de favorecer a interação social com trabalhos em grupo, a roda de estudo e produção de painéis. Nestas situações, os discentes estão o tempo todo em interação com os colegas proporcionando as discussões orais, o que permite que eles falem sobre suas descobertas, mostre seu trabalho e entenda algum conceito através da explicação, da leitura ou observação do trabalho de outro colega da classe. Permite ainda o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, como investigação, inferência, reflexão e argumentação.

Cândido (2001) ainda afirma que o trabalho em grupo, a roda de estudos e os painéis gera um ambiente que se caracteriza pela proposição, investigação e exploração de diferentes ideias por parte dos alunos, bem como pela interação entre os alunos, a socialização de procedimentos encontrados para solucionar uma questão e a troca de informações. Neste sentido, o ambiente de sala de aula possibilita o desenvolvimento dos próprios recursos de comunicação. Deste modo, no trabalho de grupo e na roda de estudos há maior solicitação de aperfeiçoamento da oralidade, ao passo que no painel solicita-se o aprimoramento da comunicação do desenho e da escrita.

Neste ambiente interativo da sala de aula de Matemática, podemos identificar as normas sociomatemáticas. Estas normas são características da atividade matemática em sala de aula. Elas são distintas das normas sociais da sala de aula em geral, pois elas são especificas dos aspectos matemáticos da atividade dos alunos.

Para Yackel e Cobb (1996, p.03) "o desenvolvimento do raciocínio dos indivíduos e os processos de construção de sentido não podem ser separados da sua participação interativa de significados matemáticos partilhados.". Os alunos devem desenvolver suas compreensões pessoais à medida que participam das normas da sala de aula, incluindo aqueles que são específicos da Matemática, enfatizando a aprendizagem com sentido. O que se diz respeito às normas sociomatemáticas, afirmam os autores, o que se torna matematicamente normal numa sala de aula é determinado pelos objetivos que pressupõe a aula. A aprendizagem matemática é tanto um processo de construção individual como um processo de adaptação das práticas matemáticas de um grupo mais extenso. Compreender a matemática *diferente*, *sofisticada*, *eficaz* e *elegante* são normas sociomatemáticas, e também, o que é considerado como uma e*xplicação e justificação aceitável pela matemática* é uma norma sociomatemática.

A exploração de determinada tarefa em grupo e depois exposição para turma como se chegou a determinadas soluções tem um potencial de contribuir significativamente para a aprendizagem dos alunos. Surgem, então, oportunidades de aprendizagem quando os alunos procuram dar sentido às explicações dadas pelos outros colegas, comparando as soluções e fazendo julgamentos sobre as semelhanças e diferenças entre suas soluções aumentando, assim, a oportunidade de aprendizagem para professores e também para os alunos.

O professor tem o papel de facilitar as discussões matemáticas que vão surgindo a partir do momento que os alunos são instigados a dar novos caminhos para a solução do problema abordado. A noção de normas sócio- matemáticas é importante para deixar claro o papel do professor quanto à sua representação na comunidade matemática, ele desempenha um papel central no estabelecimento de um ambiente de sala de aula com qualidade.

3.9. DIFERENTES TAREFAS NA GESTÃO DO CURRÍCULO E DA AULA DE MATEMÁTICA

A aprendizagem dos discentes ocorre por dois fatores importantes, as atividades que realizam e as reflexões que fazem sobre elas, surge como objetivo da atividade a tarefa esta pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno como também pode ser da iniciativa do próprio aluno, a tarefa pode ser feita no inicio do trabalho ou ser construída à medida que vai se decorrendo. Existem muitos tipos de tarefas dentre elas temos os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação, (Ponte 2005).

Os problemas constituem um traço fundamental das orientações curriculares de todas as series, pois o mesmo tem como finalidade desafiar o aluno a fazer novas descobertas. Medeiros (2001, p.33) acrescenta "[...] o problema, para receber essa denominação, precisa ser desafiador parao aluno, não podendo ser resolvido por meio de procedimentos padronizados.". Para Onuchic (1999, p.207), "[...] os ploblemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática mas também, como um primeiro passo para se fazer isso."

Os exercícios servem apenas para os alunos por em pratica o que aprenderam com a exposição do professor, reduzir o ensino da matemática apenas a resolução de exercícios implicara no empobrecimento deste conhecimento além de ser muito desmotivante para o aluno.

As investigações promovem o envolvimento dos discentes, pois atividades desta natureza requerem maior participação ativa desde a primeira fase do processo. Segundo Trindade (2008, p.80) "podemos dizer que as investigações matemáticas diferenciam-se das demais por serem situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos várias alternativas de exploração e investigação.".

Nas tarefas de investigação, na formulação de problemas e exercícios é possível envolver tanto o contexto da vida real como termos puramente matemáticos.

Os projetos são caracterizados por tarefas com uma duração de tempo maior, estas podem ser mais ricas, permitindo uma parendizagem mais profunda e interessante, entretanto, tem um elevado risco dos alunos se desligarem da tarefa pelo caminho.

As tarefas de modelação são tarefas tiradas da realidade vivida pelos alunos, estam envolvidas em uma problemática, estabelecida por problemas ou investigações.

Para Ponte (2005) as tarefas estão divididas em duas dimensões fundamentais: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. Para ele o grau de desafio matemático está relacionado com a forma de percepção de dificuldade de uma questão que constitui uma dimensão há muito tempo usada para graduar as questões que se propõem aos discentes, enquanto o grau de estrutura é uma dimensão que varia entre os pólos de “aberto” e “fechado”. Segundo Ponte (2005, p.08) “[...] Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que pedido, ou em ambas as coisas.”. Destaca que:

No *exercício* a tarefa é fechada e de pouco desafio;

No *problema* a tarefa também é fechada, mas com um grau de elevado desafio;

Na *investigação,* por sua vez, tem um grau de desafio mais elevado e é aberta.

Para comprendermos melhor os difentes tipos de tarefas, Ponte (2005) os distigue no seguinte diagrama.

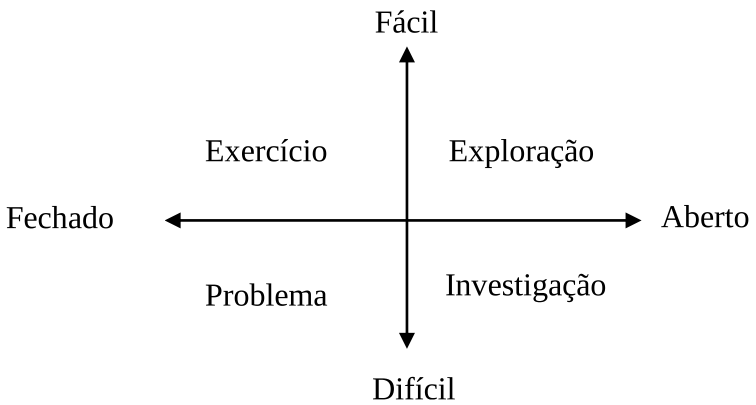


Figura 7 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e abertura[9]

As tarefas de exploração são relativamente fáceis e abertas, temos então que nem todas as tarefas abertas são de elevado grau de desafio. A diferença entre as tarefas de investigação e exploração esta no grau de desafio.

O autor ainda destaca outras duas dimensões das tarefas, a duração e o contexto. A duração está ligada ao tempo de realização da tarefa que pode ser curta ou longa. O contexto está ligado aos

[9] (Ponte, 2005, p.08)

pólos: tarefas enquadradas num contexto de realidade e tarefas formuladas em termos puramente matemáticos. As tarefas de modelação se apresentam num contexto de realidade, constitui problemas ou investigações vai depender da estruturação do enunciado.

No que diz respeito às *aplicações* da Matemática, trata-se na maioria dos casos de exercícios ou problemas de aplicações de conceitos ou ideias matemáticas. Uma tarefa também muito usada são os jogos que constituem uma importante potencialidade para a aprendizagem se o docente souber valorizar os aspectos matemáticos que ele proporciona. Para Smole et al (2008, p.09)

> [...] o trabalho com jogos é um dos recursos que favorece o desenvolvimento da linguagem, diferentes processos de racíocinio e de interação entre os alunos, uma vez que durante um jogo cada jogador tem a possibilidade de acompanharo trabalho dos outros, defender pontos de vista e aprender a ser crítico e confianteem si mesmo.

Tendo em conta todas estas tarefas é recomendável que o professor não escolha apenas um tipo, mas diversifique na medida do possível. A diversificação é necessária, porque cada tipo de tarefa desempenha um papel importante para alcançar os objetivos curriculares. A gestão curricular realizada pelo professor,segundo o autor supracitado, tem a ver como ele (re)constrói o currículo.

Ao fazer seu planejamento, o docente deve levar em conta suas condições de trabalho e seus alunos. Segundo Ponte (2005), há duas estratégias de ensino da matemática o “o ensino direto” e o “ensino-aprendizagem exploratório”. No ensino direto ele destaca que o professor assume um papel principal, considera que o aluno aprende ouvindo e fazendo exercícios tendo como objetivo memorizar conceitos e técnicas, explicado e exemplificado pelo professor, tem a ideia de que o aluno aprende através da transmissão do conhecimento. No ensino-aprendizagem exploratório por sua vez, o professor não deve procurar explicar tudo, mas deixar uma parte para que os alunos busquem e descubram novos caminhos na construção da aprendizagem.

O autor destaca que a aprendizagem decorre não só de ouvir o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim na reflexão que os discentes fazem quando realizam a tarefa. Na realização de tarefas de cunho exploratório e investigativo é um elemento marcante as discussões que surge, Ponte destaca que neste momento os alunos expõem seus resultados e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros o professor aproveita para procurar clarificar alguns conceitos e procedimentos, constitui-se então como uma oportunidade de construção de novos conhecimentos.

Ao definir suas estratégias de ensino o professor, de acordo com Ponte (2005) deve levar em conta o currículo, mas também os alunos e suas capacidades, as condições e recursos da escola e da comunidade.O autor destaca ainda que “A gestão curricular ao nível da aula tem a ver com o modo como o professor concretiza a estratégia definida, tanto para a unidade como para a aula [...] e a adapta às condições concretas e à resposta que vai obtendo dos seus alunos.”(p.22)

Um pólo de análise da gestão curricular na aula são *as finalidades e os objectivos* visados. Outro pólo centra-se nos *alunos e na sua relação com o professor,* Outro ainda, prende-se com as *tarefas propostas e os materiais e recursos mobilizados*. Ainda segundo Ponte (2005, p.23)

> A gestão curricular feita na aula não é um simples trabalho de aplicação[...]. O trabalho do professor na aula é um trabalho eminentemente criativo. Cabe-lhe explorar as situações que se desenvolvem, tirar partido das intervenções dos alunos, aproveitar as oportunidades que se lhe oferecem. Reformular os seus objectivos e a sua estratégia, em função dos acontecimentos na aula[...].

A gestão curricular está estreitamente ligada a dois pontos fundamentais: a seleção das tarefas e o modo dominante na construção do conhecimento ela começa no planejamento da unidade e passa pela preparação da aula ou da semana de trabalho e culmina na gestão de ensino-aprendizagem em tempo real, feita no decorrer da própria aula. Esta gestão é um processo complexo de tomada de decisões, com base em informação que o professor vai recolhendo.

3.10. AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA

Investigar é empenhar-se em descobrir alguma coisa que não se conhece. A investigação matemática possui um significado muito característico. Investigar para alguns matemáticos é encontrar relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, buscando identificar as suas respectivas propriedades. (Ponte, Brocardo e Oliveira 2003). Nas investigações matemáticas, segundo os autores, os alunos são inseridos no papel de matemáticos. Diante de uma determinada situação, eles devem tentar compreende-la, descobrir padrões, relações, semelhanças e diferenças de forma a poder chegar a uma generalização.

Sabemos que a típica aula expositiva não tem conseguido alcançar os objetivos de uma boa aprendizagem por parte dos alunos. Apenas o uso dessa prática tem levado a uma visão errada da matemática, acreditando que a aprendizagem se dá através do acúmulo de fórmulas. As investigações matemáticas podem ser uma importante atividade educativa, levando em conta que é um ótimo aliado no desenvolvimento de ideias matemáticas.

Uma investigação matemática usualmente se desenvolve em torno de um ou mais problemas, existe uma relação estreita entre problemas e investigações, ambos requerem um grande empenho dos alunos, desenvolvem o raciocínio e a criatividade. Ponte e Matos (1996, p. 119 apud Trindade 2008, p.74) afirmam que as investigações matemáticas, tal como outros tipos de atividades de Resolução de Problemas, "envolvem processos de raciocínio complexos e requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos". Mas requerem também algumas características próprias: "enquanto os problemas matemáticos tendem a caracterizar-se por assentarem em dados e objetivos bem concretos as investigações têm um ponto de partida muito menos definido".

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.20), a investigação matemática abrange quatro momentos principais.

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. Finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado.

Os autores afirmam, ainda que estes momentos podem acontecer em simultâneo, e cada um desses pode incluir atividades diversas, resumidas na Tabela 1.

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Teste e reformulações	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Tabela 1- Momentos na realização de uma investigação[10]

Diante disso, percebemos que os processos envolvidos em uma investigação matemática se confundem com os exigidos na resolução de problemas. Podemos destacar que para resolver

[10] (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003, p. 21)

problemas é necessário passar pelas etapas descritas na Tabela 1. Para Polya (1965, apud Onuchic,1999, p.210), “resolver problemas” era o tema mais importante para se fazer matemática, e “ensinar o aluno a pensar” era sua importância primeira. E para Onuchic (1999, p.210), “um tema que fundamenta a investigação e a resolução de problemas em matemática é “como pensar””.

Entretanto, se na resolução de problemas já é pretendido chegar a uma solução definida, enquanto na investigação, tratando-se de situações mais abertas, a questão não é bem definida no início, sua exploração pode divergir por diversos caminhos os levando-os as conclusões diferentes. Para Brocado (2001, p.93) uma diferença marcante entre resolução de problemas e investigações matemáticas está nos objetivos de cada uma. Segundo a autora, “Num problema, procura-se atingir um ponto não imediatamente acessível, ao passo que numa investigação o objetivo é a própria exploração.”. Destaca ainda,

> A resolução de problemas permite ao aluno alguma criatividade na resolução de uma nova situação. No entanto, o professor pode ainda controlar tanto o conteúdo como o modo de ensinar. O fato de nas investigações caber ao aluno um papel importante na formulação de questões para investigar pode alterar esta situação ao nível das relações de poder. (p.94)

No ensino aprendizagem da matemática, o envolvimento ativo dos alunos é fundamental. Os mesmos aprendem mais quando mobilizam os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingirem um objetivo. É este um dos aspectos forte da investigação.

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor. (PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2003, p. 23)

Em Brocardo (2001, p.127) destaca que os argumentos para se introduzir investigações na aula de matemática podem se agrupar em cinco tipos:

> (1) o argumento do que é a Matemática: a Matemática não é só um conjunto de conteúdos;
> (2) o argumento do que fica para a vida: saber usar processos importantes para a vida;
> (3) o argumento da motivação: as investigações motivam os alunos;
> (4) o argumento da aprendizagem: desenvolvem capacidades, contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem;
> (5) o argumento do ambiente de aprendizagem: ajudam a estabelecer um ambiente vivo em que os alunos participam ativamente.

As investigações matemáticas podem ajudar a motivar os alunos, pois eles participam efetivamente de todo o processo e não ficam só sentados ouvindo o professor falar. Este tipo de atividade ajuda a diversificar a aula deixando-a mais atrativa, ela possibilita que os alunos levantem ideias matemáticas, estabeleçam relações entre elas, desenvolvam formas de raciocínio, e as formalize e generalizem, possibilitando que eles se comuniquem matematicamente. Brocardo (2001, p.127 à128) desta que:

> (...) embora considere que as investigações podem ajudar a motivar os alunos porque é mais divertido fazer uma coisa do que estar sentado a ouvir o professor, porque ajudam a diversificar o tipo de atividades que se podem propor na aula e porque podem possibilitar, sobretudo quando envolvem a manipulação de objetos físicos, o estímulo de mais neurônios visto que a sua história passa por mais canais, o argumento fundamental que justifica a sua introdução tem a ver com a natureza da Matemática. A história da Matemática, para além do seu conjunto rico de aplicações, forneceu também métodos e modos de pensar que são tão importantes como os fatos. Estes modos de pensar, usados na descoberta matemática, são característicos desta ciência e não podem ser excluídos do ensino. De fato, eles são uma parte do que é a Matemática e constituem um poderoso instrumento para compreender e analisar o mundo. (...).

Numa investigação matemática fica claro que o seu objetivo principal é levar os alunos a explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente, pois se sabe o ponto de partida, mas não o de chegada. Ela precisa ocupar um lugar importante na experiência matemática dos alunos, já que a mesma proporciona uma vivência por parte dos alunos nos processos característicos da matemática, como formular questões e conjecturas, testar as conjecturas e procurar argumentos que demonstrem que as suas conjecturas resistem a sucessivos testes.

3.10.1. As fases de uma investigação matemática

Uma aula de matemática caracterizada como tradicional, segue uma sequência de fases esperadas pelos alunos: o professor apresenta uma definição, em seguida dar exemplos e por fim uma lista de exercícios. Com explicação do conteúdo por parte do professor, onde é realizado alguns exemplos que envolvem o conteúdo, em seguida, o professor passa uma lista de exercícios que os alunos devem resolver, com aplicação direta do conteúdo que foi apresentado, logo depois o professor faz a correção do exercício.

Uma aula de natureza investigativa é bem diferente e é influenciada por muitos fatores. Em geral, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) o trabalho investigativo envolve três fases: *introdução da tarefa, realização do trabalho e a discussão final dos resultados.*

Na fase de *introdução da tarefa*, o professor desempenha um papel fundamental, este deve garantir que todos os alunos entendam a proposta da tarefa e o que se espera no decorrer da mesma. É nesta fase que os alunos compreendem o sentido de investigar. Então, para que a realização da tarefa de investigação na aula de matemática seja significativa para aprendizagem dos alunos, é necessário que o professor invista bastante na sua preparação e também na hora da exposição dessas aulas. E ainda, é imprescindível que para um bom desempenho dessas atividades, o professor tenha bem claro quais os objetivos que se pretende atingir com a realização de determinadas tarefas investigativas.

Além disso, o professor deve propiciar um ambiente de aprendizagem na sala de aula, onde o aluno se sinta seguro e a vontade para explorar bem a tarefa investigativa, dando-lhes tempo para elaborar, testar e justificar suas conjecturas.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que o aluno deve sentir que suas ideias são valorizadas, e que não é necessária à validação constante do professor. E ainda, enfatizam que os alunos devem saber que podem contar com o professor, mas que o desenvolvimento da tarefa depende essencialmente da sua criatividade. É importante também que o professor deixe bem claro no início o que é pedido como produto final.

No desenvolvimento da tarefa, no qual ocorre a realização do trabalho o professor diminui sua intervenção e deixa os alunos explorem a tarefa, procura compreender como o trabalho dos alunos vai decorrendo, prestando apoio quando for necessário. Quando se é proposta uma tarefa de investigação aos alunos, espera-se que eles possam utilizar os vários processos que caracterizem a atividade investigativa. Os autores destacam que alguns desses processos, são sintetizados da seguinte forma:

- Exploração e formulação de questões, etapa onde o aluno gasta mais tempo, é decisiva para que os alunos comecem a formular questões e conjecturas;
- Formulação de conjecturas, estas podem surgir de diferentes formas, por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. Nesta fase é de fundamental importância que os alunos registrem suas conjecturas, com isto eles se confrontam com a necessidade de explicarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto as suas realizações;

- Teste e reformulação de conjecturas, com a manipulação dos dados os alunos começam a apontar no sentido de certa conjectura para logo em seguida essa ser refutada por caso em que não se verifica;
- Justificação das conjecturas, nesta etapa os alunos devem entender que o teste, só por si, não confere a conclusão dos resultados;
- Avaliação da tarefa, esta permitirá que o professor saiba se seus alunos progrediram de acordo com suas expectativas, ou se é necessário repensar a sua ação nesse campo.

E, por último, temos a fase da discussão dos resultados, nesta os alunos expõem suas estratégias, conjecturas e justificações, o professor desempenha o papel de mediador. Nesta fase os alunos podem sistematizar suas ideias e refletir sobre o trabalho realizado. Na discussão dos seus resultados os alunos ganham um entendimento mais rico do de significa investiga, além de desenvolver a capacidade de se comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e seu poder de argumentação.

Temos também que resaltar, afirmam os autores, a importância do professor nas aulas de investigação tem um papel determinante para inserção dessas tarefas no currículo de seus alunos, eles têm a responsabilidade de prepará-las e conduzi-las de acordo com ritmo de seus alunos. É muito importante que o professor saiba fazer suas intervenções sem tirar do aluno a possibilidade de suas descobertas, criando seus caminhos e tirando suas próprias conclusões.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.47) destacam algumas tarefas para o professor na realização de atividades de investigação, sintetizadas da seguinte forma:

- Desafiar os alunos, garantindo que estes se sintam motivados para realizar a atividade.
- Avaliar o progresso dos alunos, podendo variar desde uma simples verificação se tudo está sendo bem conduzido, dando o sinal de que podem prosseguir na atividade sem problemas, até a um apoio mais direto interferindo positivamente no trabalho dos alunos.
- Raciocinar matematicamente, trabalhando com questões inesperadas que surgem no decorrer da investigação e fazendo conexões com outros conceitos matemáticos ou até mesmo extramatemáticos.

- Apoiar o trabalho dos alunos, colocando questões mais ou menos diretas, fornecendo ou recordando informação relevante, fazer síntese e promover a reflexão dos alunos.

Além de preparar a tarefa, salientam os autores, é necessário que o professor pense como ira estruturar suas aulas, uma vez que, neste tipo de tarefa é muito habitual organizar os alunos em pequenos grupos. No entanto, cabe ao professor decidir se a realização da tarefa será individualmente ou em pequenos grupos.

3.11. OS MATERIAIS CONCRETOS, A REFLEXÃO E AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

As atividades de investigação como já foi citada possibilita ao aluno o desenvolvimento de sua capacidade de raciocínio e, também os estimula a fazer matemática. Sabemos que um dos objetivos da Educação Matemática é fazer com que o aluno possa fazer Matemática, por isto os alunos deveriam na maior parte do tempo de ensino-aprendizagem dedicar-se a descobrir e a validar suas descobertas. Para Goldenberg (1999, p.03) "[...] O objetivo propriamente dito é que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz, e pra isso tem que fazer investigação.".

O autor afirma ainda que muitos fatos matemáticos produzidos historicamente, como o teorema de Pitágoras ou o valor de π, para a grande maioria das pessoas que provavelmente se esquecerão desses, os modos de pensar matematicamente continuam como um instrumento precioso para ver e conseguir compreender o mundo. Para esse autor para os alunos compreenderem o mundo que os rodeia, é tão importante conhecer parte dos resultados matemáticos produzidos historicamente, quanto saber "como" se pensa matematicamente, ou seja, conhecer os 'modos de pensar matematicamente' que produzem "os hábitos matemáticos de pensamento".

Um dos métodos que podem ajudar os alunos no desenvolvimento de atividades investigativas é o uso de materiais concretos, eles possibilitam que o aluno ao manipula-lo possa desenvolver um raciocínio que os levem a uma formalização de suas ideias.

> E é até possível que a investigação – especialmente quando envolve materiais físicos estimule mais neurônios ao difundir a sua história através de mais canais, uma vez que os alunos com as mãos fazendo manipulações, com os olhos observam manipulações, e com a voz discutem a actividade com os colegas. (GOLDENBERG, 1999, p.02)

E segundo Bishop e Goffee (1986, p.11) “[...] Aprender matemática fazendo, significa não só manipular objetos, mas também pensar acerca dessa manipulação e refletir acerca do procedimento e da execução.”. De acordo com os autores citados, fica claro que a manipulação de objetos ajuda e muito a desenvolver processo de pensar matematicamente e o saber fazer matematicamente, porém deixam claro que o uso dos mesmos deve levar o aluno apenas a manipula-lo como uma forma de descontrair a aula é necessário que seu uso que ele esteja envolto de significados. Ao serem utilizados nas atividades de investigações possibilitam que sejam usados de forma mais significativa.

4. METODOLOGIA

Para operacionalizar os objetivos da pesquisa, utilizamos instrumentos para coletar dados qualitativos. Neste sentido, realizamos atividades de investigação matemática, utilizando materiais concretos e uma técnica de trabalho em grupo denominada Painel Integrado, numa turma do 1º ano do Ensino Médio, composta de 25 alunos, em uma escola da rede estadual de ensino localizada na cidade de Itatuba no Estado da Paraíba.

A pesquisa, foi planejada para ser desenvolvida em três momentos: Pré-Teste, realização de cinco atividades de investigações matemáticas de demonstrações do Teorema de Pitágoras, feito através de cinco encontros e Pós-Teste[11]. Além disso, utilizamos notas de campo.

No primeiro encontro, foi aplicado o Pré-Teste com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios que dos alunos com relação ao Teorema de Pitágoras. Os resultados da análise do Pré-Teste contribuiu para o planejamento das aulas. Do segundo ao sexto encontro foi realizada, a cada aula, uma atividade de investigação matemática com uma demonstração do Teorema de Pitágoras. Em cada atividade era explorada uma demonstração diferente, usando material concreto. Dentre a mais de 370 demonstrações que existem do Teorema, foram escolhidas param serem explodas pelos alunos: **a demonstração de Bhaskara, a demonstração Hindu, a demonstração usando semelhança de triângulos, a demonstração feita pelo presidente Garfield, e a demonstração utilizando a área do semicírculo.**

Para a realização de cada atividade investigativa foi aplicada a técnica do Painel Integrado que foi vivenciado em três momentos,

1º Momento:

- Formação dos grupos (5 grupos de 5 alunos);
- Apresentação da atividade de investigação de uma demonstração do Teorema de Pitágoras;
- Formulação e validação de conjecturas.

2º Momento:

- Formulação de novos grupos (5 grupos de 5 alunos);
- Apresentação das descobertas e estratégias adotadas.

---

[11] O Pré-Teste e o Pós-Teste foram iguais.

3º Momento:

- Discussão dos resultados.

E por fim, foi realizado Pós-Teste. Este foi comparado com o Pré-Teste para podermos tirar conclusões referentes à eficiência das atividades de investigação matemática desenvolvida nos cinco encontros.

5. ANÁLISE DOS DADOS

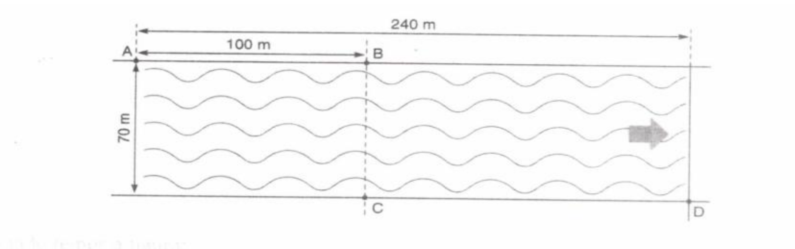
5.1. ANÁLISE DO PRÉ-TESTE

Os 25 alunos que participaram de nossa pesquisa dispuseram de 90 minutos para resolver o pré-teste que era composto por dez questões, as quais, apresentaremos a seguir.

Questão 1) Em um triângulo, as medidas dos três lados são números inteiros. O maior dos lados tem 7 cm, e um dos outros dois lados mede 2 cm. Qual a medida do terceiro lado desse triângulo? Por que você escolheu este número[12]?

Tinha por objetivo verificar se o aluno conseguiria assegurar a condição de existência de um triângulo. Os dados numéricos foram escolhidos de forma a facilitar os cálculos.

Questão 2) (EEP-SP) Um cabo deverá ligar o ponto A, situado na margem esquerda do rio, ao ponto D, situado na margem direita do mesmo rio, 240 metros rio abaixo (como mostra a figura). Suponha que as margens do rio sejam paralelas e que sua largura seja de 70 metros. Este cabo deverá ser esticado pela margem esquerda do rio, de A até B, 100 metros rio abaixo. Do ponto B atravessará perpendicularmente a margem do rio para o ponro C. De C seguirá ao longo da margem direita até D. Calcule o comprimento total do cabo e determine qual seria seu comprimento se ele fosse esticado diretamente de A até D[13].



Visava verificar se o aluno ao calcular o comprimento total do cabo saberia fazer o somatorio correto e se conseguiria determinar um modelo matemático para obter um triângulo retângulo para calcular o comprimento se ele fosse esticado diretamente de A até D, matematizando a situção. E que seus dados numericos ocasionavam uma igualdade pitagórica.

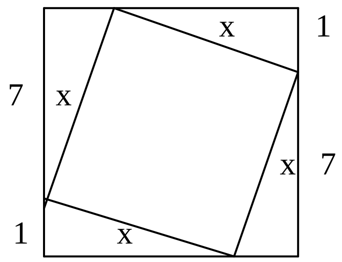
---

[12] JUNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUICCI, Benedicto. A conquista da Matemática 8º ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.
[13] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa 1º ano do ensino médio. 2º Ed. São Paulo: FTD, 2005.

Questão 3) De uma placa de alumínio foi recortada uma região triangular equilátera de lado 20 cm. Qual é a área dessa região que foi recortada[14]?

Tinha por objetivo verificar se o aluno tinha conhecimento da classificação de triângulos e do calculo de áreas de regiões triangulares.

Questão 4) Aplique o teorema de Pitágoras para determinar a medida x do lado do quadrado destacado na figura. Em seguida, determine a área desse quadrado, sabendo que as medidas indicadas são dadas em centímetros[15].



Esta questão explora uma aplicação do teorema de Pitágoras onde além de encontrar a medida de “x” do lado do quadrado o aluno deveria encontrar sua área, utilizando a medida encontrada. Tendo por objetivo verificar seus conhecimentos sobre o teorema de Pitágoras e sobre o calculo de área de figuras planas.

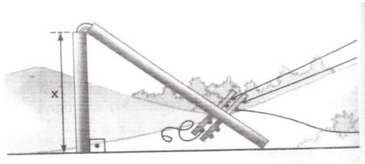
Questão 5) Determine a área aproximada da região limitada por um trapézio retângulo cujas bases medem 24 m e 52 m e a diagonal maior, 75m[16].

Tal questão exigia que o aluno tivesse conhecimento do calculo de área desta região, além de perceber que deveria aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar sua altura e só assim poder determinar sua área.

Questão 6) (UFpel-RS) Em um recente vendaval, um poste de luz de 9 m da altura quebrou-se em um ponto a uma distância x do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da base do mesmo. A que altura x do solo o poste quebrou[17]?

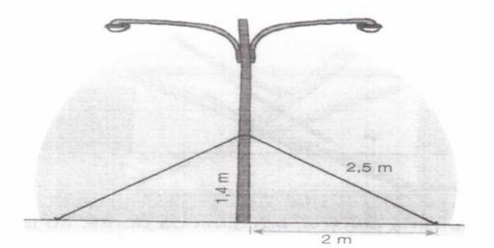
---

[14] DANTE, Luis Roberto.Matemática volume único. 1ed. São Paulo: Ática, 2005.
[15] JUNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUICCI, Benedicto. A conquista da Matemática. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.
[16] DANTE, Luis Roberto. Tudo é matemática 9º ano. 3 ed. São Paulo: Ática, 2009.
[17] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa 1º ano do ensino médio. 2 ed. São Paulo: FTD, 2005.



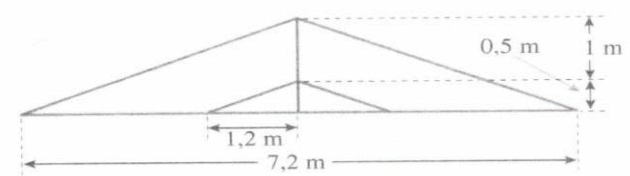
O intuito desta questão era verificar se o aluno conseguiria reconhecer a utilidade do Teorema de Pitágoras para a resolução do problema e, também, perceber se tinham domínio na resolução de produtos notáveis.

Questão 7) (OBMEP) Uma companhia de eletricidade instalou um poste num terreno plano. Para fixar bem o poste, foram pregados cabos no poste a uma altura de 1.4 metros do solo e a 2 metros da distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme mostra a figura. Um professor de matemática, após analisar estas medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta[18].



Esta questão tinha como objetivo detectar se o aluno reconheceria a necessidade da utilização do teorema de Pitágoras para verificar se o professor estava correto e assim justificar sua resposta.

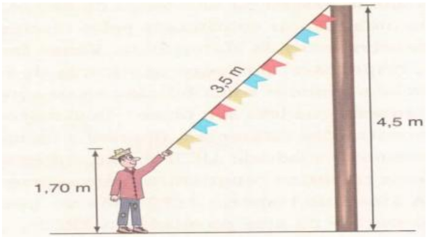
Questão 8) A figura abaixo representa a estrutura de madeira de telhado de uma residência. A base tem 7,2 m. Quantos metros de madeira são necessários para construir as outras partes dessa estrutura[19].



Nesta questão o nosso intuito era verificar se o aluno reconheceria a utilidade do Teorema de Pitágoras para a resolução do problema de uma situação da vida cotidiana e, também verificar se ele conseguiria concluir o problema, já que é necessário operacionalizar os resultados encontrados para chegar à resposta correta.

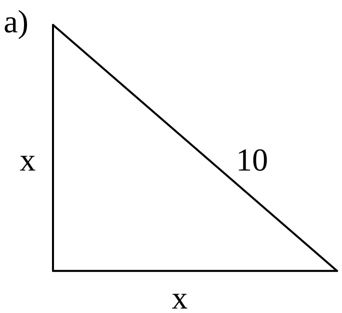
[18] Banco de questões 2010. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
[19] BIANCHINI, Edwaldo. Matemática 9º Ano. 6 ed. São Paulo: Moderna, 2006.

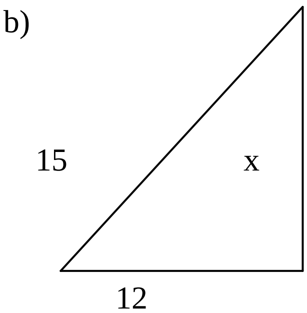
Questão 9) Para ajudar nas festas juninas de sua cidade, Paulo esticou completamente um fio de bandeirinhas, com 3,5 m de comprimento, até o topo de um poste com 4,5 m de altura. Sabemos que Paulo mede 1,70m; a que distância ele ficou do pé do poste[20]?



Mas uma vez está questão tinha como objetivo que o aluno percebesse necessidade da utilização do teorema de Pitágoras para resolução do problema numa situação do cotidiano, além disso, teria que perceber que pra encontrar a distância correta ele deveria tirar dos 4,5m da altura do poste a altura de Paulo para chegar ao resultado correto.

Questão 10) Calcule o valor de x aplicando o teorema de Pitágoras





O objetivo desta questão era verificar se para o aluno a igualdade pitagórica tem significado, o que permite identificar corretamente catetos e hipotenusa.

Tabela 2 - Avaliação das questões do Pré-Teste

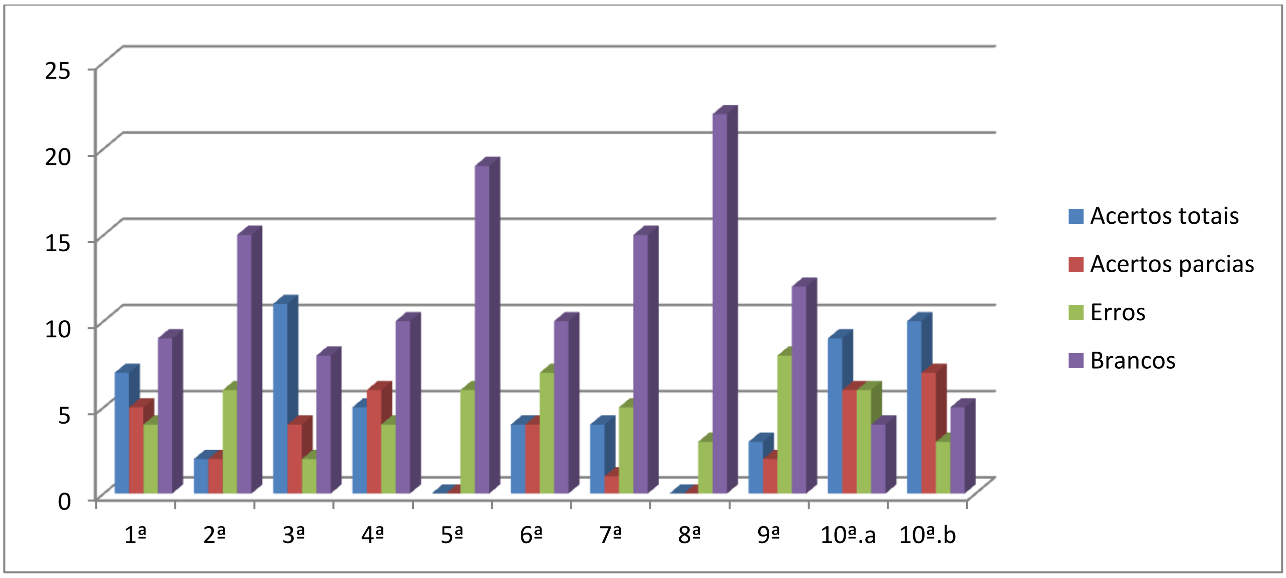
Questões	Acertos totais	Acertos parciais	Erros	Branco
1ª	7 (28%)	5 (20%)	4 (16%)	9 (36%)
2ª	2 (8%)	2 (8%)	6 (24%)	15 (60%)
3ª	11(44%)	4 (16%)	2 (8%)	8 (32%)
4ª	5 (20%)	6 (24%)	4 (16%)	10 (40%)

[20] IEZZI, G. et al. Matemática: ciências e aplicações 1º ano do ensino médio. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010, p.218.

5ª	0 (0%)	0 (0%)	6 (24%)	19 (76%)
6ª	4 (16%)	4 (16%)	7 (28%)	10 (40%)
7ª	4 (16%)	1 (4%)	5 (20%)	15(60%)
8ª	0 (0%)	0 (0%)	3 (12%)	22(88%)
9ª	3 (12%)	2 (8%)	8 (32%)	12 (48%)
10ª.a	9 (36%)	6 (24%)	6 (24%)	4 (16%)
10ª.b	10 (40%)	7 (28%)	3 (12%)	5 (20%)

Observe o gráfico abaixo para facilitar a análise dos dados dispostos na tabela acima.

Avaliação das questões do pré-teste



Analisando o pré-teste podemos detectar algumas das dificuldades dos alunos no que se refere ao tema abordado. Na primeira questão percebemos que apesar do número de acertos totais e parciais terem um bom índice, muitos alunos mostraram ter dificuldades para assegurar a condição de existência do triângulo. Na segunda, boa parte dos alunos não conseguiu interpretar os dados do problema, tão pouco matematizar a situação e perceber que se tratava de uma aplicação do Teorema de Pitágoras. A terceira questão foi uma das que tiveram o maior número de acertos totais e parciais, muitos demonstraram ter conhecimento do triângulo equilátero e de sua área, porém o somatório dos não acertos teve um número também elevado. Na quarta questão que se tratava de uma aplicação direta do teorema de Pitágoras, teve um bom índice de acertos totais e parciais, mas este valor é menor que a soma dos erros e respostas em branco, percebemos que muitos alunos não conseguiram se quer encontrar a medida de “x”, e consequentemente não conseguiram determinar a área do quadrado. A quinta questão foi uma das que os alunos tiveram maior dificuldade, muitos não lembravam se quer como era a figura de um trapézio, muito menos como calcular sua área e, os que reconheciam um trapézio não sabiam usar os dados para calcular sua área. Percebemos que eles não associavam que o Teorema de Pitágoras era útil para calcular sua altura. Nas questões seis, sete, oito e nove que se tratava de situações diretas de aplicações do Teorema de Pitágoras, boa parte dos alunos mostraram ter conhecimento do teorema, porém quando se tratava de usá-los na resolução de problemas muitas não sabiam aplicá-lo, percebemos que o somatório de não acertos nestas questões foi bastante elevado. Na última questão percebemos na forma descontextualizada do teorema o número de acertos foi maior do que os de não acertos.

Portanto, é notória a dificuldade dos alunos no que se refere à aplicação do teorema em estudo.

5.2. ANÁLISE DAS AULAS

Em todas as aulas de investigações os alunos foram divididos em grupos, utilizamos uma técnica de trabalho em grupo chamada Painel Integrado. Em cada aula foi utilizada uma demonstração do Teorema de Pitágoras utilizado material concreto.

O Painel Integrado foi dividido em três momentos. No **1º momento** conforme a Figura 1 os alunos numa quantidade de 25, foram divididos em 5 grupos de 5 alunos. A partir daí foi dado a cada grupo a tarefa de investigação sobre uma demonstração do Teorema de Pitágoras, que deveriam explorar. No **2º momento**, depois de explorar bem a tarefa proposta, de formular suas conjecturas, os grupos foram desfeitos para serem formados novos grupos, conforme a Figura 2. Esses grupos eram formados por um componente de cada grupo, ou seja, um componente do grupo 1, um do grupo 2, um do grupo 3, um do grupo 4, um do grupo 5. Neste momento, cada componente das equipes explicaram como chegaram às suas conjecturas e como as validaram mostrando suas estratégias. O **3º momento** conforme a Figura 3 foi a finalização do Painel Integrado. Neste momento, os alunos ficaram sentados em um só grupo e foi desenvolvido um debate sobre todos os acontecimentos da aula, sobre a mediação do professor, e os alunos colocaram seu ponto de vista sobre a aula.

1º MOMENTO: 5 grupos de 5 alunos

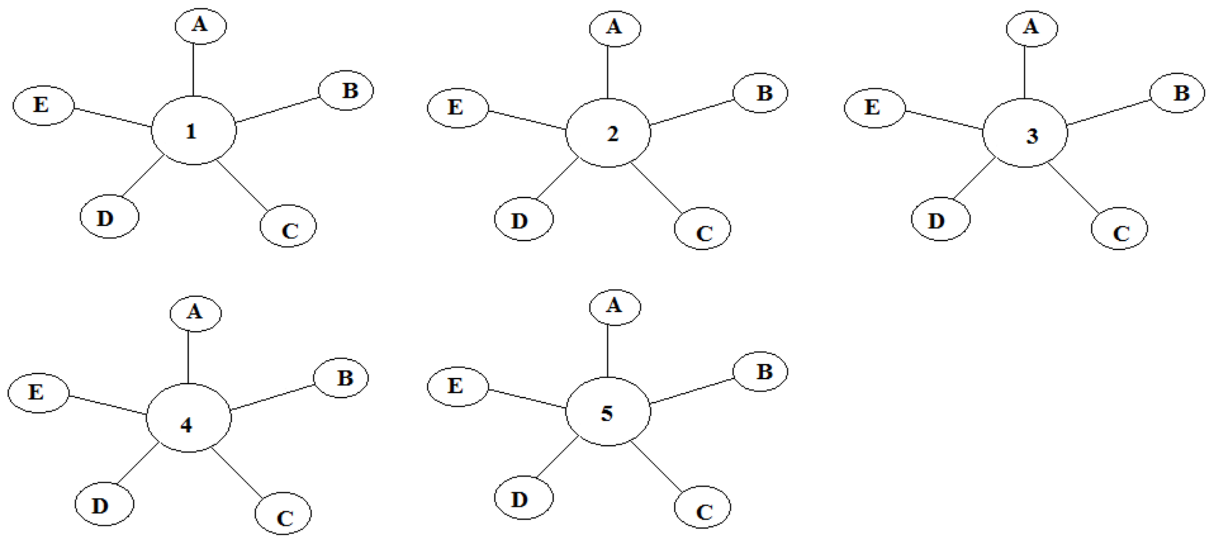


Figura 8 - Primeiro momento do Painel Integrado

2º MOMENTO: 5 equipes de 5 alunos

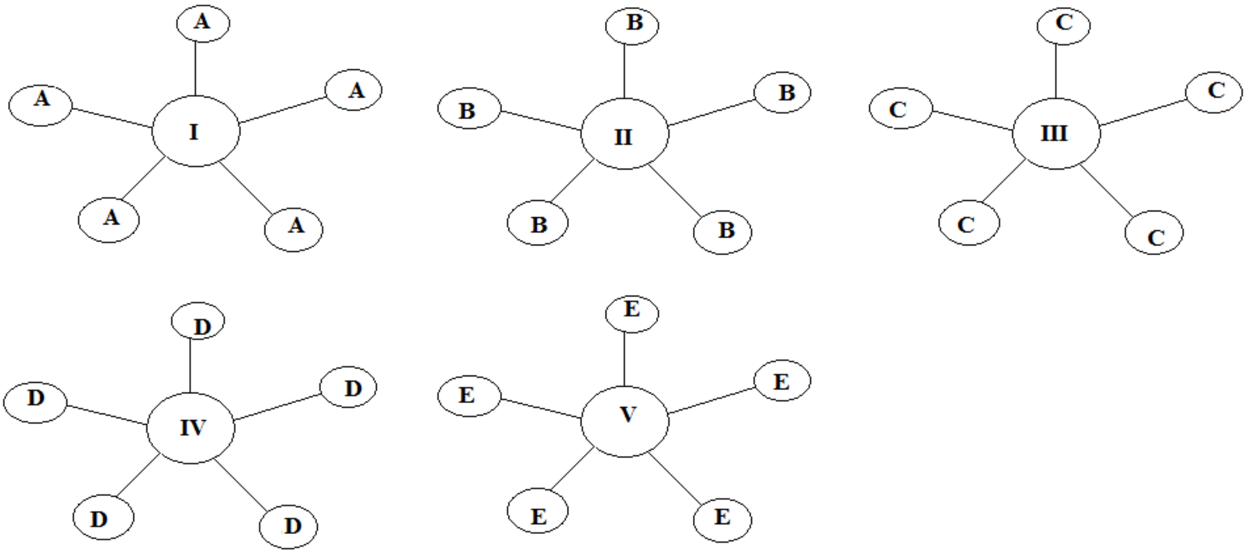


Figura 9 - Segundo momento do Painel Integrado

3º MOMENTO: 1 grupo de 25 pessoas

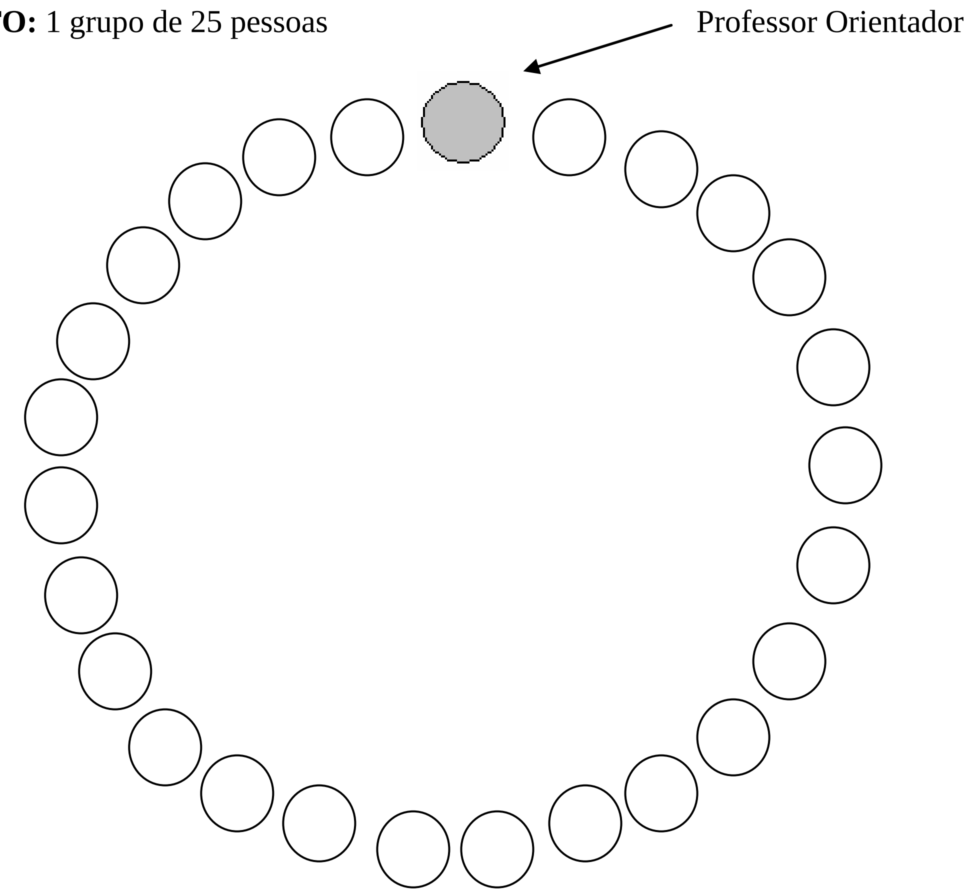


Figura 10 – Terceiro momento do Painel Integrado

ANÁLISE DAS AULAS DE INVESTIGAÇÕES

PRIMEIRA AULA: Demonstração de Bhaskara do Teorema de Pitágoras

Neste encontro cada grupo dispunha de várias tesouras, réguas, canetas, folhas de papel sulfite para as anotações e cartolinas de diferentes cores, de modo a poderem realizar a exploração da tarefa. O uso destes materiais concretos facilitou a realização de descobertas, possibilitou aos estudantes estabelecer relações ampliando o seu pensamento abstrato possibilitando a compreensão do Teorema de Pitágoras. A manipulação direta dos materiais concretos por parte dos alunos serviu para favorecer a autonomia e participação ativa dos mesmos no processo de aprendizagem.

A primeira atividade propunha **a Investigação da Demonstração de Bhaskara:**

1. Desenhe quatro triângulos iguais de catetos **b** e **c**, a hipotenusa **a**, recorte-os;

2. Desenhe e recorte um quadrado cujos lados sejam iguais a diferença entre os catetos do triângulo;
3. Com as cinco peças (4 triângulos e 1 quadrado), monte um quadrado de lado **a;**
4. Que modificações da subfigura-chave (o triângulo) são necessárias de modo que as hipotenusas dos triângulos se tornem lados do quadrado. Qual a expressão utilizada para calcular a área de cada triângulo retângulo e por que fazemos uso da mesma? E qual a expressão de área de cada quadrado?
5. Agora analisando a figura montada o que se pode concluir? Compare suas descobertas com as de seus colegas. Estabeleça conjecturas e justifique-as.

A exploração dessa tarefa durou 90 minutos. No início da apresentação da tarefa os alunos tiveram um pouco de dificuldades, pois nunca tinham trabalhado com investigações matemáticas. No entanto, no decorrer da aula os alunos foram se envolvendo na atividade, começaram a explorar a tarefa e, aos poucos, entenderam que deveriam se esforçar para não pedir ajuda à professora. Além disso, procuraram discutir as suas dúvidas com os colegas no grupo e as decisões que tinham que tomar para validar as suas conjecturas.

Os alunos começaram a recortar os triângulos e o quadrado e, logo em seguida, de acordo com o era pedido na tarefa, foram desenvolvendo suas explorações. Com a manipulação dos materiais os alunos perceberam que para montar o quadradão era necessário fazer alguns movimentos, os grupos 1 e 2 afirmaram que deveriam fazer 4 movimentos e perceberam que, com estes movimentos a hipotenusa dos triângulos se tornaram o lado do quadradão. Os grupos 3 e 4 afirmaram que eram necessários 8 movimentos, e o grupo 5 afirmou que eram necessários 16 movimentos. Também encontraram a mesma relação, ou seja, a hipotenusa dos triângulos tornou- se o lado do quadradão. E, neste momento considerei melhor usar o termo “movimento” para os alunos descreverem como chegaram ao quadradão do que do que os termos “translações e rotações”, já que os alunos não eram habituados com este termo.

Continuando com a tarefa de investigação um dos grupos fez a seguinte afirmação observando o quadradão formado com os 4 triângulos retângulos e o quadrado menor[21].

> A área do quadradão vai ser $\boldsymbol{a^2}$, pois como a medida da hipotenusa do triângulo retângulo é $\boldsymbol{a}$, ela se tornou o lado do quadradão e sabendo que a área de um quadrado é a medida do seu lado ao quadrado chegamos a esta afirmação.

[21] O discurso foi tirado das anotações dos alunos.

Outro grupo ainda assegurou que:

A área do quadradão é $\boldsymbol{a^2}$ e do quadrado menor é $(\boldsymbol{b-c})^2$

Com a afirmação dos grupos, a professora empolgada, perguntou que outras relações eles poderiam encontrar, se pegassem apenas os dois dos triângulos retângulos. Então eles começaram a manipulá-los. Declararam ter encontrado várias figuras geométricas, como triângulos isósceles e também teve um grupo que identificou um paralelogramo de lados $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, os grupos afirmaram ainda que, com os dois triângulos, poderiam formar um retângulo. Observando o retângulo formado pelos alunos, a professora os questionou perguntando que expressão matemática eles poderiam usar para representar a área desse retângulo. Os alunos analisando o retângulo perceberam que seus os lados mediam $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, lembraram que a área do retângulo é a medida do seu comprimento vezes a medida de sua largura. Então encontraram a seguinte expressão $\boldsymbol{b.c}$. Neste momento, a professora os questionou sobre que expressão poderiam usar para representar a área de cada triângulo retângulo. Em um dos grupos fizeram as seguintes afirmações[22]:

> **Aluno 1**: Vai ser $\frac{\boldsymbol{b.c}}{\boldsymbol{2}}$.
> **Professora:** Por quê?
> **Aluno 1:** Com dois triângulos retângulos conseguimos formar um retângulo, então isto nos mostrou que cada triângulo retângulo é a metade do retângulo, então como a área do retângulo é $\boldsymbol{b.c}$ a área de cada triângulo vai ser $\frac{\boldsymbol{b.c}}{\boldsymbol{2}}$.
> **Aluno 2:** E percebemos ainda que a área do retângulo é a soma das áreas dos dois triângulos.
> **Professora:** Como você pode validar esta afirmação?
> **Aluno 2:** Fizemos o seguinte, como concluímos que a área de cada triângulo retângulo é $\frac{\boldsymbol{b.c}}{\boldsymbol{2}}$ e sabendo que o retângulo é formado por dois triângulos retângulos somando as duas áreas desses triângulos chegamos a área do retângulo. Veja a expressão: $\frac{\boldsymbol{b.c}}{\boldsymbol{2}}+\frac{\boldsymbol{b.c}}{\boldsymbol{2}}=\frac{\boldsymbol{2b.c}}{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{b.c}$.
> Observando fica claro pra nós que a área do retângulo também pode ser a soma das áreas dos dois triângulos retângulos.

Nessa fase em outro grupo os alunos além de intuir que a área de cada triângulo retângulo era $\frac{\boldsymbol{b.c}}{2}$, notaram que havia 4 triângulos retângulos, então asseguraram que sua área séria $\boldsymbol{4}\frac{\boldsymbol{b.c}}{\boldsymbol{2}}$.

Procurando que os alunos conseguissem começar a organizar os seus dados e a validar as suas conjecturas, a professora sentiu a necessidade de intervir oralmente e questionou os grupos que conclusão eles poderiam tirar com a figura montada. A partir desta intervenção, os alunos começam

[22] O discurso dos alunos, aqui apresentado, foi obtido através de notas de campo.

a pensar como organizar os dados, então pegando as expressões matemáticas que eles já haviam encontrado começaram procurar que relações elas tinham com o quadrado grande.

Foi ai que uma aluna fez a seguinte observação em seu grupo[23]:

> **Aluna:** Nós construímos o quadradão com os 4 triângulos retângulos e com o quadrado pequeno, então podemos dizer que ele é formado pela soma dessas figuras. Então a área do quadradão é igual à soma das áreas das outras figuras.
> **Aluna:** Vamos testar isto com as expressões que já encontramos.
> **Grupo**: Vamos (empolgação).
> **Grupo:** Nós já achamos que: A área do quadradão é $\boldsymbol{a^2}$;
> A área do quadrado menor é $(\boldsymbol{b-c})^{\boldsymbol{2}}$;
> A área dos quatros triângulos retângulos é $\boldsymbol{4\frac{b.c}{2}}$.
> **Aluna:** Então, vamos ter a seguinte expressão: $\boldsymbol{a^2 = (b-c)^2 + 4\frac{b.c}{2}}$.
> **Professora:** O que vocês podem fazer agora?
> **Grupo:** Precisamos pensar um pouco.

Dando continuidade à validação de suas conjecturas, os estudantes que já haviam chegado à expressão citada anteriormente, perceberam que dava pra resolver o produto notável que havia na expressão[24].

> **Grupo:** Pensado um pouco percebemos que a expressão $\boldsymbol{a^2 = (b-c)^2 + 4\frac{b.c}{2}}$, pode ser resolvida
> $\boldsymbol{a^2 = b^2 - \cancel{2.b}.c + c^2 + \cancel{2.b}.c}$, com isso o que nos resta é $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.
> **Professora:** O que vocês encontraram?
> **Aluna 1:** Ficamos muito impressionados pois não é que chegamos a expressão do Teorema de Pitágoras.
> **Professora:** E como vocês chegaram a esta afirmação?
> **Aluno 2:** Por que nós vimos no ano anterior esta fórmula.
> **Professora:** Sim, mas por que está?
> **Aluno 3**: Eu lembro que tem haver com o triângulo retângulo.

Uma aluna de outro grupo concluiu dizendo que o Teorema de Pitágoras diz que "a medida do quadrado da hipotenusa é igual à medida da soma dos quadrados dos catetos". A validação de suas conjecturas estava claramente ligada com conteúdos que já haviam visto anteriormente. No entanto, os mesmos eram necessários para que eles pudessem justificar as conjecturas que haviam proposto com as manipulações. Todos os alunos conseguiram chegar ao mesmo tipo de explicação relatada acima. Porém só um grupo conseguiu definir o que afirmava o Teorema de Pitágoras e os outros afirmaram apenas que conseguiram chegar à "fórmula" do Teorema.

---

[23] O discurso dos alunos, aqui apresentado, foi obtido através de notas de campo.
[24] O discurso dos alunos, aqui apresentado, foi obtido através de notas de campo.

Depois da exploração da tarefa nos grupos, utilizando a técnica do Painel Integrado, os alunos de cada grupo formaram um novo grupo e os alunos relatavam para os outros membros como chegaram às suas descobertas e como as validaram. Em seguida, a professora coordenou uma discussão em um só grupo, onde os alunos expunham as descobertas que fizeram e o que acharam da experiência de exploração de uma tarefa. No final, entregaram as anotações que fizeram durante toda a aula.

Portanto, tanto a professora como os alunos fizeram um balanço bastante positivo da aula, tal tarefa com uso do material concreto trouxe para os alunos a oportunidade de trabalhar com uma das tantas demonstrações do Teorema de Pitágoras de forma onde o aluno participou ativamente de cada passo da investigação, explorando, organizando os dados encontrados e validando suas conjecturas, o que resultou numa afirmação formal que o Teorema de Pitágoras.

SEGUNDA AULA: Demonstração Hindu do Teorema de Pitágoras

Para realização desta atividade foi dado aos alunos os seguintes materiais: tesouras, réguas, cartolinas de diferentes cores, canetas e folhas de papel sulfite para as anotações. A utilização destes materiais tinha a finalidade de ajudar os alunos a deduzirem o Teorema de Pitágoras e chegar a uma dedução formal deste teorema. Fazendo uso do método dedutivo, os alunos, partindo de alguns conhecimentos que já possuíam, pensando, raciocinando e fazendo uso de algumas regras lógicas, puderam validar suas conjecturas.

A segunda atividade propunha a Investigações da Demonstração Hindu do Teorema de Pitágoras:

1. Desenhe e recorte um triângulo retângulo qualquer. Não importa as medidas de seus lados. Represente a medida dos lados por letras: **a** é a medida da hipotenusa: **b** e **c** são as medidas dos catetos. Em seguida, recorte outros três triângulos iguais ao primeiro.
2. Agora desenhe e recorte um quadrado, cujo lado seja à hipotenusa **a** dos triângulos retângulos.
3. Desenhe e recorte mais dois quadrados: um lado de lado **b** e outro de lado **c**.
4. Agora com o quadrado de lado **a** e os quatro triângulos, forme um quadradão. O que você conclui? Anote.
5. Usando agora os mesmos quatro triângulos e os dois quadrados de lados **b** e **c**, forme outro quadrado. O que você conclui? E qual a relação com o primeiro quadradão? Anote. Se você

eliminar os quatros triângulos do primeiro quadradão, o que acontece? E se você eliminar os quatros triângulos do segundo quadradão, o que sobrará?

6. Comparando os dois quadrados, o que você conclui?
7. Escreva suas conjecturas e justifique-as?

A exploração desta atividade durou 90 minutos. A apresentação desta atividade foi mais tranquila, pois eles já haviam feito a primeira e já sabiam como deviam prosseguir no decorrer da mesma, sabiam que deveriam explorá-la sem pedir a orientação da professora. Os alunos tiveram consciência da responsabilidade de expressar os seus interesses, questões e compreensão da atividade proposta. Além disso, puderam explicar suas estratégias e responder acerca de sua legitimidade. À professora coube a tarefa de criar um ambiente em que os alunos focaram a sua atenção na elaboração de conjecturas e na sua validação.

Os alunos, utilizando as réguas e as cartolinas distribuídas pela professora a cada grupo, começaram a fazer o que era pedido na atividade, desenharam e recortaram os triângulos e os quadrados e, em seguida, começaram a exploração da atividade. Com a manipulação dos materiais, os alunos perceberam que o primeiro quadradão formado com os quatro triângulos e o quadrado de lado $\boldsymbol{a}$ tinha como medida de lado a soma dos catetos dos triângulos, ou seja, cada lado media $\boldsymbol{b+c}$ e usando os mesmos triângulos e os dois quadrados de lados $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, formaram outro quadradão de lado $\boldsymbol{b+c}$. Concluíram, então, que os quadradões eram iguais, pois os seus lados tinham a mesma medida.

Continuando com a atividade, os alunos fizeram o que pedia o item 5 e eliminaram os quatros triângulos do primeiro quadradão. A professora os questionou o havia restado e um aluno de um dos grupos fez a seguinte afirmação[25]:

> **Aluno 1**: Sobrará o quadrado de lado $\boldsymbol{a}$
> **Professora**: E o que mais você pode encontrar nesse quadrado de lado $\boldsymbol{a}$?
> **Aluno 1**: Como já estudamos esta é uma figura plana , acho que podemos dizer que podemos encontrar sua área.
> **Professora**: E qual seria sua área?
> **Aluno 1**: Como a medida do seu lado é $\boldsymbol{a}$, sua área é $\boldsymbol{a^2}$, vimos isto na atividade passada lá também havia um quadrado de lado $\boldsymbol{a}$ e sua área era esta.

[25] O discurso foi tirado das notas de campo

Após esta afirmação, a professora questionou se todos os grupos conseguiram chegar a esta afirmação e todos afirmaram que sim. Prosseguindo com a atividade, os alunos retiraram do segundo quadradão, que era igual ao primeiro, os mesmos quatro triângulos e todos os grupos perceberam que sobravam dois quadrados de lados $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Concluíram ainda que assim como o quadrado de lado $\boldsymbol{a}$ tem área igual $\boldsymbol{a^2}$, os outros têm área igual à $\boldsymbol{b^2}$ e $\boldsymbol{c^2}$ e que a soma de suas áreas era igual a $\boldsymbol{b^2 + c^2}$. A professora sentiu a necessidade de fazer uma intervenção oral em que questionou dos alunos a conclusão da atividade. Um dos grupos registrou o seguinte:

> **Grupo 3**: Concluímos que o quadrado de área $\boldsymbol{a^2}$ é igual a $\boldsymbol{b^2 + c^2}$, vimos que eles eram iguais e se tiramos de cada um os mesmo triângulos, então o que sobrou em cada uma também é igual, fazendo está relação temos $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$, e como vimos na atividade passada chegamos à fórmula do Teorema de Pitágoras.[26]

Todos os grupos conseguiram chegar a esse tipo de explicação. Apesar de terem discutido a forma de resolução e de terem argumentado com a professora a respeito do processo que os levou a essa resposta, a professora percebeu que havia necessidade que eles explorassem mais um pouco a atividade. Então, os questionou se havia alguma outra estratégia em que eles pudessem usar para validar as suas afirmações. Neste momento, percebeu-se uma maior dificuldade dos alunos e declararam:

> Não conseguimos ver de outra forma para podemos afirmar que $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$ e que isto é a relação do Teorema de Pitágoras.
> **Professora**: Certo, mais será que não tem outra forma de ver isto, usando estas mesmas figuras. Vamos lá tentem.[27]

A partir daí, os alunos começam a explorar novamente a atividade. Cada grupo começou a manipular as figuras e como já sabiam que os quadradões formados eram iguais, depois de algum tempo, um aluno do grupo 1 fez a seguinte colocação para o seu grupo:

> **Aluno 1**: Já sei podemos comparar suas áreas.
> **Aluno 2**: Como?
> **Aluno 3**: Sim, como?
> **Aluno 4**: Ei é mesmo, olhem se afirmamos que os dois são iguais, é por que eles tem a mesma área.
> **Aluno 1**: Foi isto mesmo que pensei.
> **Aluno 5**: Mas não entendi ainda como usar isto, pois não foi isto que usamos anteriormente
> **Aluno 1**: Foi, mas desta vez vamos usar também a área dos triângulos que não usamos anteriormente.

[26] O discurso foi tirado das anotações dos alunos do grupo 3.
[27] O discurso dos alunos aqui apresentados foi tirado das notas de campo.

> **Aluno 3**: Como?
> **Aluno 5**: Vejamos, vamos fazer algumas anotações.[28]

Nesta fase, os alunos fizeram as seguintes anotações:

> **Grupo 1**: Encontramos no primeiro quadradão as seguintes áreas: a área do quadrado de lado $\boldsymbol{a}$ é igual a $\boldsymbol{a^2}$ e que cada triângulo tem área igual a $\frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{2}}$ e como são quatro triângulos então temos que a áreas dos quatro é $\boldsymbol{4 \cdot \frac{bc}{2}}$, concluímos que a área desse quadradão é $\boldsymbol{a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2}}$. No segundo quadradão, como ele é formado pelos mesmos triângulos então sua área também será de $\boldsymbol{4 \cdot \frac{bc}{2}}$ e os quadrados tem áreas $\boldsymbol{b^2}$e $\boldsymbol{c^2}$ isso nos levou a conclusão que a área do segundo quadradão é $\boldsymbol{b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2}}$. Como já afirmamos e mostramos estas áreas são iguais, então podemos escrever que
> $\boldsymbol{a^2 + \cancel{4 \cdot \frac{bc}{2}} = b^2 + c^2 + \cancel{4 \cdot \frac{bc}{2}}}$
> $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$
> Nós chegamos a mesma conclusão de antes, que a área do quadrado de lado $\boldsymbol{a}$ é igual à soma dos quadrados de lados $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, pois basta observar que na equação escrita acima, tiramos de cada lado a área dos triângulos, como fizemos antes, sendo que desta vez trabalhamos ela de forma escrita e antes apenas com a manipulação das figuras.[29]

Em seguida, quando todos os grupos tinham conseguido explorar bem a atividade e validar suas conjecturas, foi utilizada a técnica do Painel Integrado, em que cada grupo foi desfeito e montado novos grupos. Cada membro deveria expor como desenvolveram a atividade e quais as estratégias usadas para validar as suas conjecturas. Logo após a discussão em grupo, a professora coordenou uma discussão em um único grupo, onde os alunos explicaram como desenvolveram sua atividade e quais foram suas maiores dificuldades, além de expressar o que acharam desta proposta e como isso ajudou a desenvolver um pensamento matemático. No final, entregaram as anotações feitas por eles durante toda a aula.

Diante de tudo o que foi citado, a professora e os alunos fizeram um balanço muito positivo da aula. É preciso destacar que as manipulações das figuras ajudaram os alunos na dedução do Teorema de Pitágoras e na sua validação de maneira formal.

[28] O discurso dos alunos aqui apresentados foi tirado das notas de campo.
[29] O discurso do grupo 1 aqui apresentado foi tirado das suas anotações.

TERCEIRA AULA: **Demonstração do Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos**

Nesta aula os alunos dispunham de réguas, lápis e folhas de papel sulfite para as anotações e também para se explorar a atividade. O material utilizado nesta aula tinha a finalidade de ajudar os alunos na formulação das conjecturas e na validação. Para a exploração desta tarefa, o aluno deveria desenvolver uma atividade mental maior, pois para manipular as figuras eles deveriam desenhá-las.

A terceira atividade propunha a Investigação da Demonstração do Teorema de Pitágoras Usando Semelhança de Triângulos.

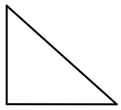
1. Desenhe um triângulo retângulo e nomeie seus elementos:
    - Vértices?
    - Catetos?
    - Hipotenusa?
    - Altura relativa à hipotenusa?
    - Projeções dos catetos sobre a hipotenusa?

    Observe a figura. O que consegues detectar? Anote
2. Agora desenhe separadamente o que você detectou o que pode identificar? Faça suas conjecturas.
3. A partir daí, que relações você pode estabelecer entre as medidas deste triângulo. Investigue razões e proporções, adição dos membros e igualdade entre as relações encontradas.
4. Faça suas conjecturas e escreve-as.
5. Justifique as suas conjecturas.

Os alunos dispuseram de 90 minutos para realização desta atividade. No inicio da aula foi entregue o material que eles utilizariam para exploração da atividade e, em seguida, começaram a desenvolvê-la. Após desenhar o triângulo, os alunos começaram a nomear seus elementos. A primeira dificuldade encontrada foi determinar a altura do triângulo relativa à hipotenusa e projeção dos catetos sobre a hipotenusa. Nessa etapa, um aluno relatou o seguinte[30]:

[30] O discurso foi tirado das notas de campo

Aluno : Como vamos determinar altura neste triângulo (mostrou a figura)



Professora: Vocês podem desenhar este triângulo de outra forma pra ficar mais fácil de enxergar onde está à altura, tentem.

Depois dessa intervenção pela professora, os alunos, em seus grupos, começaram a desenhar vários triângulos retângulos até poderem chegar a um que eles pudessem visualizar de forma mais clara sua altura. Assim, chegaram à Figura 11[31]:

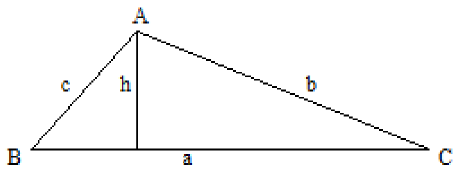


Figura 11 – Triângulo retângulo

Dando continuidade à atividade, os alunos nomearam as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. A professora os incentivou a também nomear o vértice relacionado à altura do triângulo. E os grupos usaram variáveis diferentes para nomear as projeções, temos uns exemplos abaixo na Figura 12[32]:

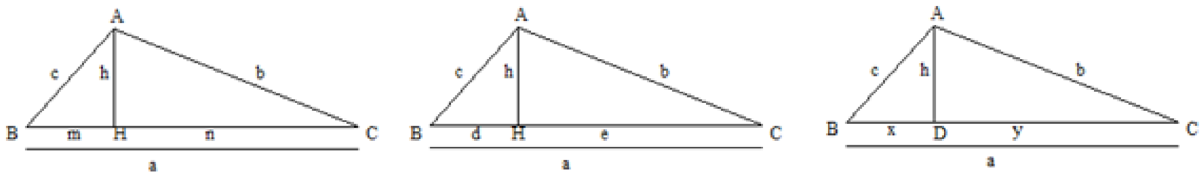


Figura 12 – Triângulos retângulos com projeções dos catetos sobre a hipotenusa

Em seguida, os alunos, observando a figura, perceberam que havia não apenas um, mas três triângulos retângulos e como era pedido no item 2 da atividade, eles os desenharam separadamente como mostra a Figura 13[33]:

[31] A figura 1 foi retirada das anotações dos alunos do grupo 3.
[32] As figuras foram retiradas das anotações dos alunos dos grupos 2, 3 e 4.
[33] As figuras foram tiradas das anotações dos alunos do grupo 3.

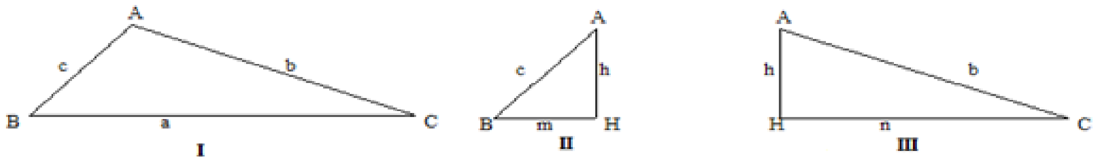


Figura 13 – Triângulos retângulos semelhantes

A partir desse momento, foi notória a dificuldade que os alunos tiveram na realização desta atividade com relação às realizadas até então. Uma das maiores dificuldades foi perceber que os triângulos que eles desenharam, separadamente, eram semelhantes, apenas um grupo fez a seguinte colocação[34]:

> **Aluno 1:** Professora, nós já fizemos o que foi pedido, desenhamos separadamente os três triângulos que encontramos e concluímos que eles têm a mesma forma.
> **Professora**: O que isso os leva a concluir?
> **Aluno 1**: Não sei.
> **Professora**: Vocês já estudaram que em matemática quando duas figuras têm a mesma forma elas são chamadas de que?
> **Aluna 2**: Eu acho que sei, elas são semelhantes.
> **Aluno 1**: Isso então quer dizer que os triângulos são semelhantes.
> **Professora**: O que necessário para que dois triângulos sejam semelhantes?
> **Aluna 2**: Formalmente eu não sei dizer, só sei que ela tem a mesma forma.

Depois que esse grupo encontrou que os triângulos eram semelhantes, os outros grupos demoraram um pouco, mas chegaram à mesma afirmação. Ao saber que os triângulos eram semelhantes afirmaram[35]:

> Sabendo que os triângulos são semelhantes, trabalhamos primeiro com dois triângulos que chamamos de I e II pela orientação da professora, pois assim ficaria mais fácil de explorar eles, então se eles eram semelhantes seus lados eram proporcionais, esta afirmação foi de uma das nossas colegas de grupo. Então, encontramos o seguinte, $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{c}}$, Ana[36] resolveu está proporção da seguinte forma $\boldsymbol{c \cdot c = am \rightarrow c^2 = am}$, continuando comparamos agora os triângulos I e III e obtivemos, $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{b}}$, Cláudio desta vez foi quem resolveu a proporção e encontro a seguinte relação $\boldsymbol{b \cdot b = am \rightarrow b^2 = an}$.
> Após isso, como era pedido na atividade adicionamos os membros e obtivemos o seguinte,
> $\boldsymbol{b^2 + c^2 = an + am}$
> $\boldsymbol{b^2 + c^2 = a.(n + m)}$
> Nesse momento, observamos que a soma das projeções $(\boldsymbol{n + m})$ eram iguais a medida $\boldsymbol{a}$ da hipotenusa do triângulo, então $\boldsymbol{b^2 + c^2 = a \cdot a \rightarrow b^2 + c^2 = a^2}$
> O que encontramos após todas estas contas foi a relação do Teorema de Pitágoras.

---

[34] O discurso dos alunos, aqui apresentado, foi tirado das notas de campo.
[35] Este relato foi tirado das anotações dos alunos do grupo 3.
[36] Os nomes utilizados são todos fictícios.

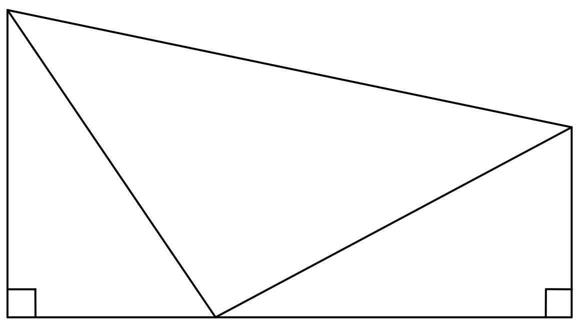
A validação das conjecturas desse grupo deu-se por meio de conhecimentos que já possuíam. Diante da dificuldade dos outros grupos que não conseguiram formular nem validar suas conjecturas, a professora, usando a técnica do Painel Integrado, pediu aos alunos do único grupo que demonstrasse o Teorema de Pitágoras usando a semelhança dos triângulos e expusessem para os colegas como chegaram a esta afirmação e quais métodos foram utilizados. Em seguida, na exposição no grupão os alunos do grupo 3, relataram como chegaram às suas descobertas e como as validaram, e os outros expuseram as dificuldades que encontraram.

No final, todos os grupos entregarão suas anotações, os que não conseguiram concluir a atividade entregaram até onde tinham explorado e também a professora pediu que relatassem as dificuldades que encontraram.

QUARTA AULA: Demonstração do Teorema de Pitágoras feita pelo presidente Garfield

Para os alunos desempenharem esta atividade foi distribuído entre os grupos, várias tesouras, réguas, cartolinas de diferentes cores e folhas de papel sulfite para as anotações. A manipulação destes materiais tinha o propósito de favorecer e dar autonomia aos alunos na exploração da atividade, além de ajudá-los na formulação e validação de suas conjecturas. Foi então proposto para os alunos a seguinte atividade de investigação:

1. Desenhe e recorte dois triângulos retângulos de mesma medida, determine seus catetos **b** e **c**, e sua hipotenusa **a**;
2. Monte a seguinte figura



3. Qual figura você obteve? Determine a área dessa figura. Que outra maneira pode-se encontrar a área desta figura? Que relação existe entre as áreas?
4. O que você conclui? Escreva suas conjecturas. Explique-as. Por que elas te parecem verdadeiras?

Na realização desta atividade que durou 90 minutos, os alunos ao recortar os dois triângulos de catetos $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, e hipotenusa $\boldsymbol{a}$, perceberão que ao coincidir dois vértices dos triângulos notaram que para terminar a montagem da figura deveriam desenhar e recortar um novo triângulo que se formava ao fechar a figura, então empolgados eles começaram a desenhar e recortar o novo triângulo. A professora, ao perceber a descoberta dos dois alunos, os incentivou a mostrar que tipo de triângulo era. Ao analisar as anotações dos grupos, encontramos a seguinte afirmação[37]:

> È um triângulo retângulo, pois sabendo que os outros dois triângulos são retângulos, então um dos seus ângulos mede 90° e soma dois outros ângulos têm que ser igual a 90°, Já que a soma tem quer dar 180°. Então nós fizemos o seguinte, dizemos que um ângulo de um dos triângulos media 60° e no outro triângulo media 30° e para dar 180° só faltava 90°, por isso concluímos que o triângulo era retângulo.

Em seguida, quando já tinham montado a figura, os alunos começaram a explorar a atividade. O material os ajudou a visualizar que a figura montada era um quadrilátero, pois tinha quatro lados. Desse modo, iniciaram uma investigação de que tipo de quadrilátero era, recordaram os tipos de quadriláteros que existiam. Entre os grupos surgiram comentários que os tipos de quadriláteros eram quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios. Para saber qual deles era o da figura, desenham cada tipo, como mostra a Figura 14 abaixo[38].

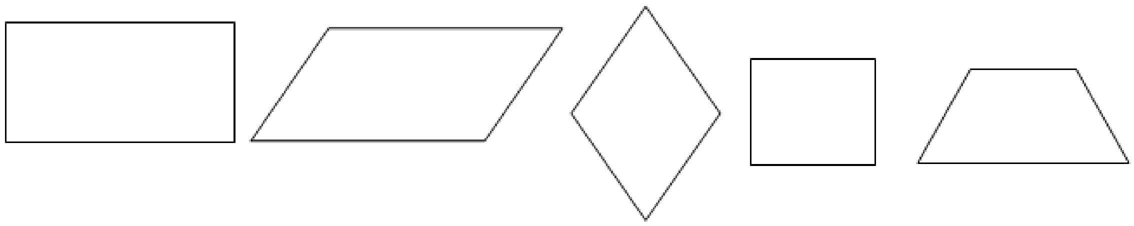


Figura 14 – Tipos de quadriláteros

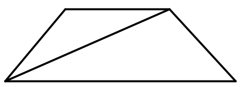
E compreenderam que a figura era um trapézio, depois dessa descoberta os alunos deveriam mostrar como se calculava a área do trapézio, muitos alunos não recordavam mais como se calculava a mesma, a professora vendo a dificuldade dos grupos fez uma intervenção, os incentivou a observar bem a figura e identificar nela algumas características.

Depois da intervenção, os alunos deram inicio a uma nova etapa da investigação. Nesta etapa, depois de algum tempo, uma aluna expôs para o seu grupo que no trapézio havia a altura e

[37] O discurso foi tirado das anotações dos alunos do grupo 4.
[38] As figuras foram tiradas das anotações dos alunos.

também as bases, procuraram então quem era altura do trapézio, após muitas tentativas chegaram à conclusão que a altura media $\boldsymbol{b+c}$. Logo em seguida após muita exploração, chegaram à conclusão de que as bases desse trapézio eram $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Para encontrar a área da figura a professora teve que intervir, pois os alunos tiveram muita dificuldade e nenhum grupo havia chegado à área do trapézio. A professora pediu que se desenhasse um trapézio qualquer em uma folha de papel sulfite e, em seguida, explorassem a figura desenha.

Dando continuidade a atividade, os alunos fizeram o que a professora sugeriu e chegaram à seguinte conclusão[39]:

> Tivemos um pouco de dificuldade para encontrar a área do trapézio, mais após a professora nos ter sugerido, fizéssemos o desenho de um trapézio qualquer separado, desenhamos e encontramos que a área do nosso trapézio é $\frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{2}}\cdot\ (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, chegamos a está conclusão após analisarmos a seguinte figura:
>
> 
>
> Percebemos que a diagonal divide o trapézio em dois triângulos, como já sabemos quem é a área de um triângulo é $\frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{2}}$, pois já vimos isto nas outras aulas, temos então que a área do trapézio vai ser
>
> $$\frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{2}}+\frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{2}}=\frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{2}}=\frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{2}}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Após todos os grupos ter chegado a esta conclusão, perceberam que área da figura montada era igual à soma das áreas dos triângulos então fizeram a seguinte afirmação[40]:

> Grupo 1: Já encontramos a área do trapézio, mas percebemos que ela é formada por três triângulos, sendo assim ela é igual a soma das áreas dos triângulos, cada triângulo tem a seguintes áreas, chamamos os triângulos de **A, B** e **C** de cada um temos as seguintes áreas.
> No triângulo **A** $\frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{2}}$
>
> No triângulo **B** $\frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{2}}$
>
> No triângulo **C** $\frac{\boldsymbol{aa}}{\boldsymbol{2}}=\frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{2}}$
>
> Somando $\frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{2}}+\frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{2}}+\frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{2}}=\frac{\boldsymbol{2bc+a^2}}{\boldsymbol{2}}$
>
> Sabemos que a área do trapézio formado é $\frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{2}}\cdot\ (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

[39] O discurso foi tirado das anotações dos alunos do grupo 5.
[40] O discurso foi tirado das anotações dos alunos do grupo 1.

Como formamos o trapézio com os três triângulos retângulos, concluímos estas áreas são iguais. Então

$$\frac{(b+c)}{2} \cdot (b+c) = \frac{2bc+a^2}{2}$$

$$\frac{b^2 + bc + bc + c^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2}$$

$$\frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

E chegamos mais uma vez a fórmula do Teorema de Pitágoras.

Quando todos os grupos conseguiram chegar à conclusão final da atividade, utilizando a técnica do Painel Integrado, cada grupo foi desfeito e organizados novos grupos com um membro de cada grupo. Cada um deveria expor como desenvolveram a atividade e quais as estratégias usadas para validar as suas conjecturas. Logo após a discussão em grupo, a professora coordenou uma discussão em um único grupo, neste os alunos deveriam expor a que conclusão tinham chegado, no final da tarefa, e como as validaram. Além disso, expuseram quais foram suas maiores dificuldades na realização da atividade. No final, cada grupo entregou as anotações que fizeram durante toda a aula.

QUINTA AULA: Generalização do Teorema de Pitágoras

No inicio da aula foi entregue aos alunos, cartolinas de várias cores, tesouras, compassos, réguas e folhas de papel sulfite para as anotações. A utilização deste material tinha como finalidade ajudar os alunos na realização da atividade, sua manipulação ajudou os alunos a formalizar suas conjecturas e as justificá-las. Nesta aula, foi proposto aos alunos uma atividade que os ajudassem a generalizar o Teorema de Pitágoras.

Na atividade propusemos:

1. Desenhe e recorte um triângulo retângulo qualquer. Não importa as medidas de seus lados. Represente a medida dos lados por letras: **a** é a medida da hipotenusa: **b** e **c** são as medidas dos catetos;

2. Agora desenhe e recorte um semicírculo para cada cateto do triângulo e um para a hipotenusa. Em seguida, sobreponha sobre cada cateto e sobre a hipotenusa um semicírculo;
3. Compare a soma das áreas dos semicírculos sobrepostos sobre os catetos com a área do semicírculo sobreposto sobre a hipotenusa;
4. Estabeleça suas conjecturas e as justifique.

Os alunos começaram a realização da atividade que durou 90 minutos, recortando o triângulo de catetos **b** e **c**, e hipotenusa **a**. Em seguida, usando o compasso, desenharam e recortaram os semicírculos, perceberam que a medida **b** e **c** de cada cateto do triângulo ia ser o diâmetro do semicírculo, e que a medida **a** era a medida do diâmetro do outro semicírculo.

Dando continuada à atividade, os alunos sobrepuseram os semicírculos sobre os catetos e sobre a hipotenusa, começaram em seguida, a explorar as áreas dos semicírculos. Muitos alunos tiveram dificuldades, mais depois de algum tempo de investigação, um grupo lembrou como se calculava a área de um de um círculo[41].

> **Grupo 3**: Sabemos que a área de um círculo é $\boldsymbol{\pi r^2}$, sabemos ainda que se $\boldsymbol{r}$ é a medida do raio e que ele é a metade o diâmetro.Com isso a área de um semicírculo é metade da área do círculo que é $\frac{\boldsymbol{\pi r^2}}{\boldsymbol{2}}$.

Uma aluna de outro grupo disse que[42]:

> **Aluna 1**: Se a área do círculo é $\boldsymbol{\pi r^2}$, se nos não temos o raio como vamos calcular a área.
> **Aluno 2**: Será que você não sabe que o raio é metade do diâmetro, e nos temos o diâmetro, assim o semicírculo colocado sobre o cateto **b** tem diâmetro igual a **b** e o colocado sobre **c** tem diâmetro igual a **c**, e colocado sobre medida de **a** da hipotenusa tem diâmetro medindo **a**.

Então os grupos chegaram à seguinte conclusão[43]:

> Chegamos à conclusão que cada área dos semicírculos mede o seguinte:
>
> O que o diâmetro mede **b** sua área mede $\frac{\pi\left(b/2\right)^2}{2}$
>
> O que o diâmetro mede **c** sua área mede $\frac{\pi\left(c/2\right)^2}{2}$

---

[41] O discurso foi tirado das anotações dos alunos do grupo 3.
[42] O discurso foi tirado das notas de campo.
[43] Estes dados foram tirados das anotações dos alunos do grupo 3.

> O que o diâmetro mede **a** sua área mede $\frac{\pi\left(a/_2\right)^2}{2}$
>
> Somado as áreas sobre os catetos e igualando sobre a que estar sobre a hipotenusa, encontramos um coisa que ficamos surpresos, pois chegamos a fórmula do Teorema de Pitágoras pensávamos que esta relação só era possível com quadrados,a professora então nos explicou que está relação é valida pra figuras semelhantes não só com áreas de quadrados. Os dados das contas que fizemos para validar nossa conclusão foi o seguinte
>
> $$\frac{\pi\left(b/_2\right)^2}{2}+\frac{\pi\left(c/_2\right)^2}{2}=\frac{\pi\left(a/_2\right)^2}{2} \rightarrow \frac{\pi\frac{b^2}{4}}{2}+\frac{\pi\frac{c^2}{4}}{2}=\frac{\pi\frac{a^2}{4}}{2} \rightarrow \frac{\pi b^2}{8}+\frac{\pi c^2}{8}=\frac{\pi a^2}{8}$$
>
> Como os denominadores são iguais, simplificamos e ficamos com $\boldsymbol{\pi b^2+\pi c^2=\pi a^2} \rightarrow \boldsymbol{\pi(b^2+c^2)=\pi a^2}$, dividimos tudo por $\boldsymbol{\pi}$, ficamos com $\boldsymbol{b^2+c^2=a^2}$, que é a relação do Teorema de Pitágoras.

Após todos os grupos terem chegado a esta mesma afirmação, utilizando a técnica do Painel Integrado, os grupos foram desfeitos e formados novos grupos com um membro de cada grupo do início, neste novo grupo, cada aluno expôs como chegaram às suas conjecturas e como as validaram. Em seguida, foi formado um único grupo, neste os alunos falaram suas conclusões e como chegaram a elas, e quais foram suas maiores dificuldades. No final, cada grupo entregou suas anotações.

A aula foi bastante proveitosa, os alunos utilizaram de conhecimentos que já possuíam para validar e suas conjecturas. Além de terem uma boa participação na atividade sem consultar a professora.

5.3. ANÁLISE DO PÓS-TESTE

Os alunos dispuseram de 90 minutos para resolver o pós-teste que era compostos por dez questões, exatamente iguais ao do pré-teste. Quando a professora já havia entregado a cada um, os alunos se concentraram e começaram a resolver as questões, foi notório que as atividades de investigações trabalhadas com eles, deram-lhes mais autonomia, ou seja, não ficavam a todo instante pedindo ajuda da professora como era de costume eles fazerem.

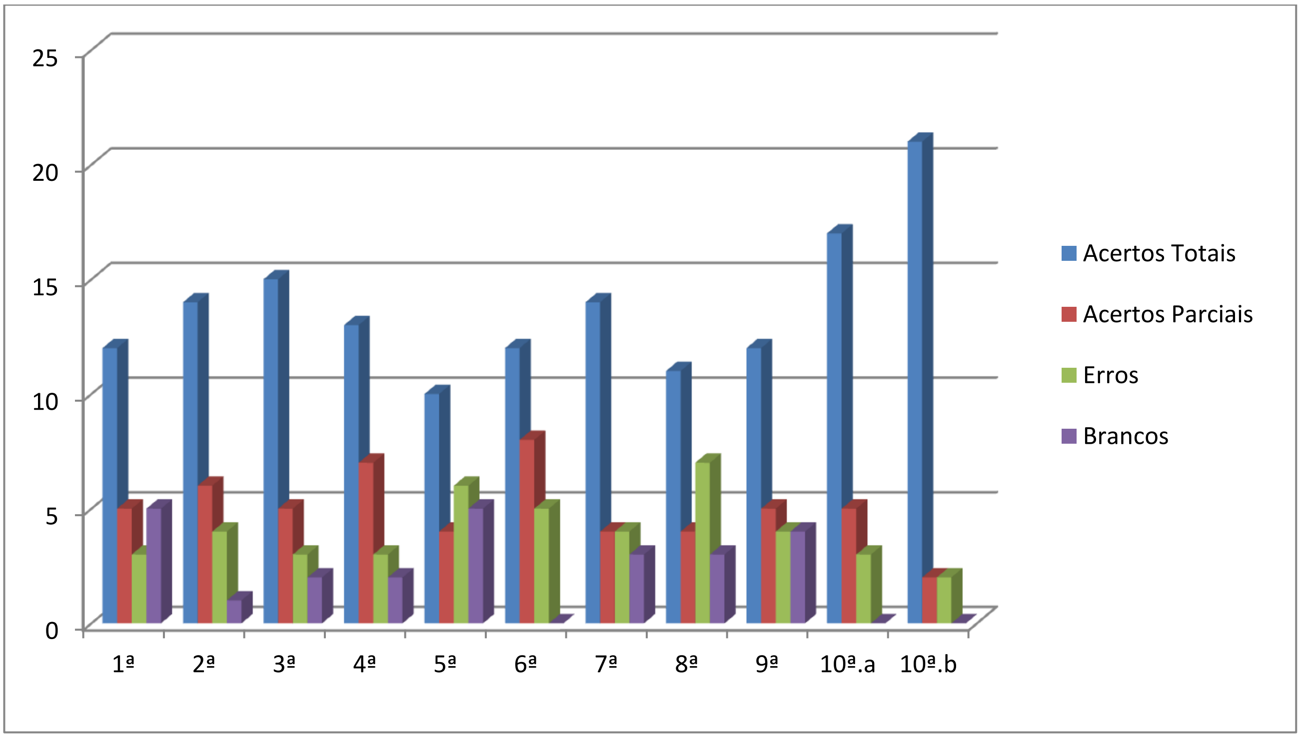
Tabela 3 - Avaliação das questões do Pós-Teste

Questões	Acertos Totais	Acertos Parciais	Erros	Brancos
1ª	12(48%)	5(20%)	3(12%)	5(20%)
2ª	14(56%)	6(24%)	4(16%)	1(4%)

3ª	15(60%)	5(20%)	3(12%)	2(8%)
4ª	13(52%)	7(28%)	3(12%)	2(8%)
5ª	10(40%)	4(16%)	6(24%)	5(20%)
6ª	12(48%)	8(32%)	5(20%)	0(0%)
7ª	14(56%)	4(16%)	4(16%)	3(12%)
8ª	11(44%)	4(16%)	7(28%)	3(12%)
9ª	12(48%)	5(20%)	4(16%)	4(16%)
10ª.a	17(68%)	5(20%)	3(12%)	0(0%)
10ª.b	19(76%)	4(16%)	2(8%)	0(0%)

Para facilitar a leitura dos dados encontrados na tabela acima observe o gráfico abaixo.

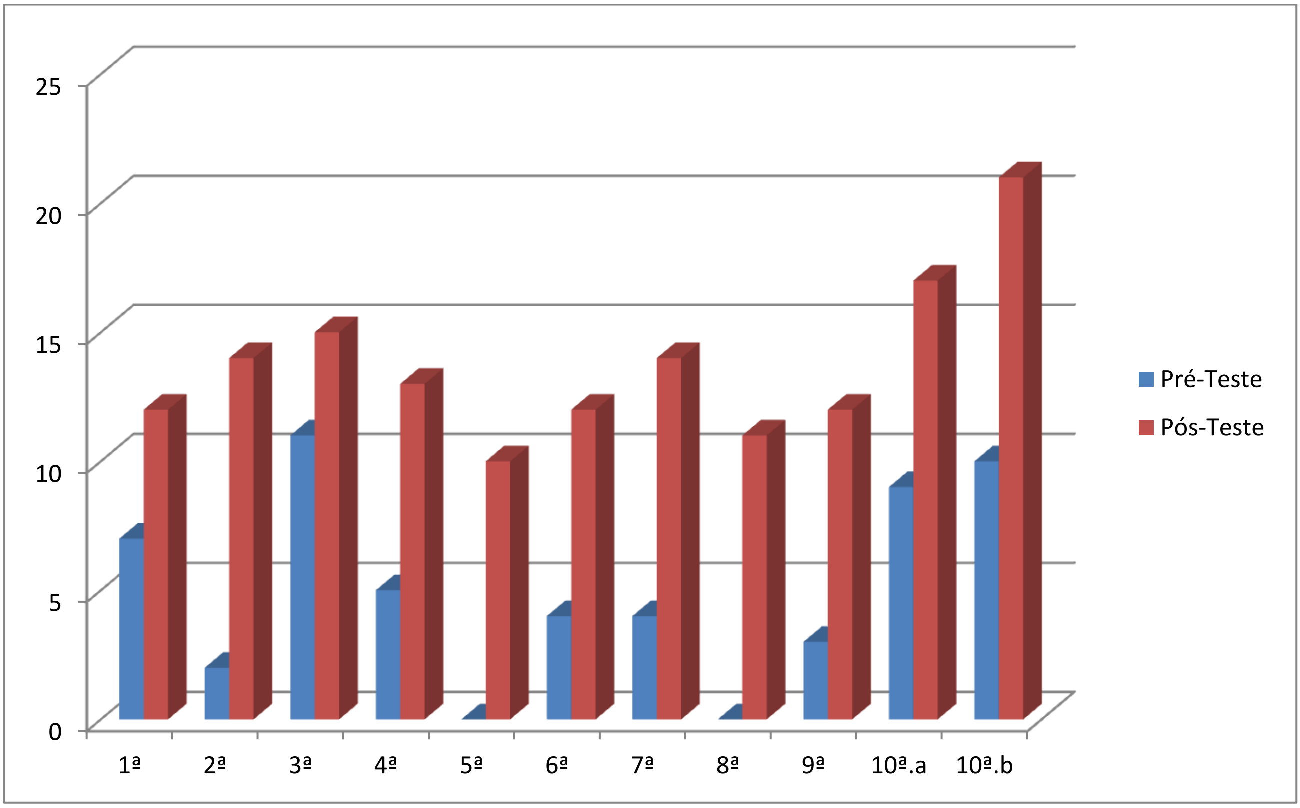
Avaliação das questões do Pós-Teste



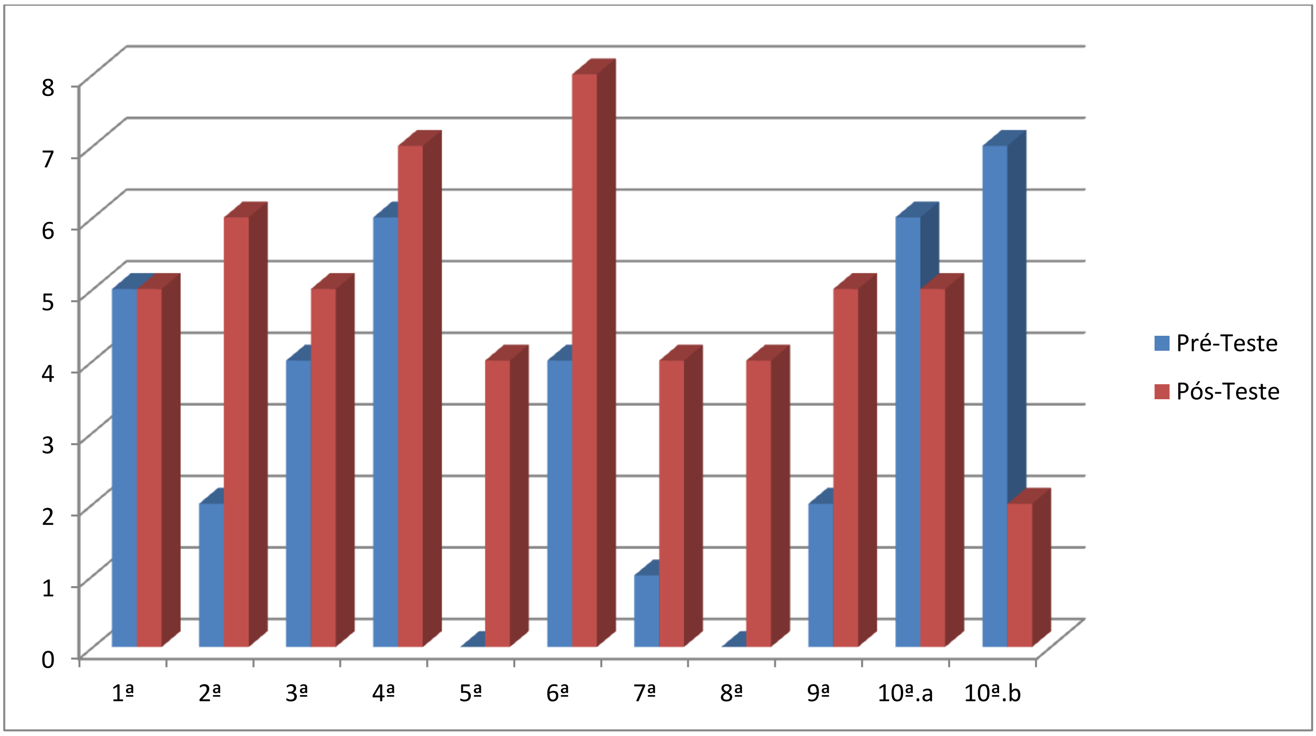
5.4. COMPARAÇÃO DO PRÉ-TESTE COM O PÓS-TESTE

A seguir temos quatro gráficos comparativos referentes a Acertos Totais, Acertos Parciais, Erros e Brancos que com o intuito de melhorar comparação entre as questões do pré-teste e do pós-teste.

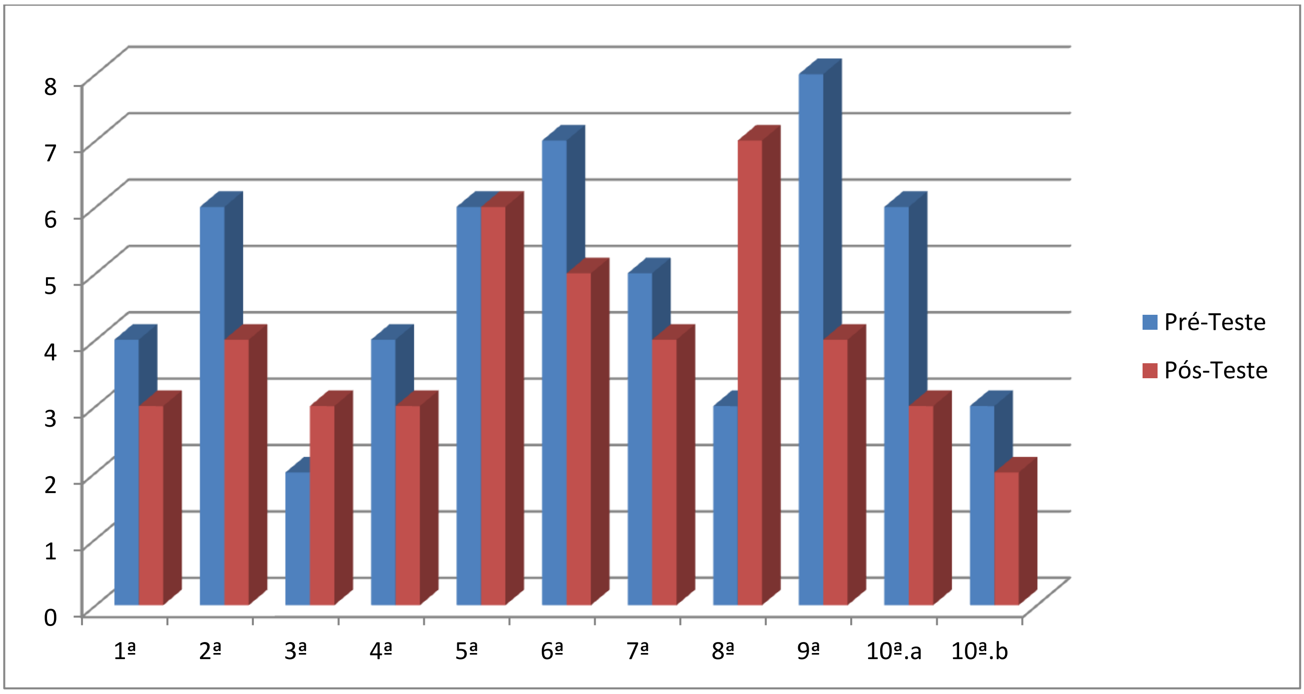
Acertos Totais



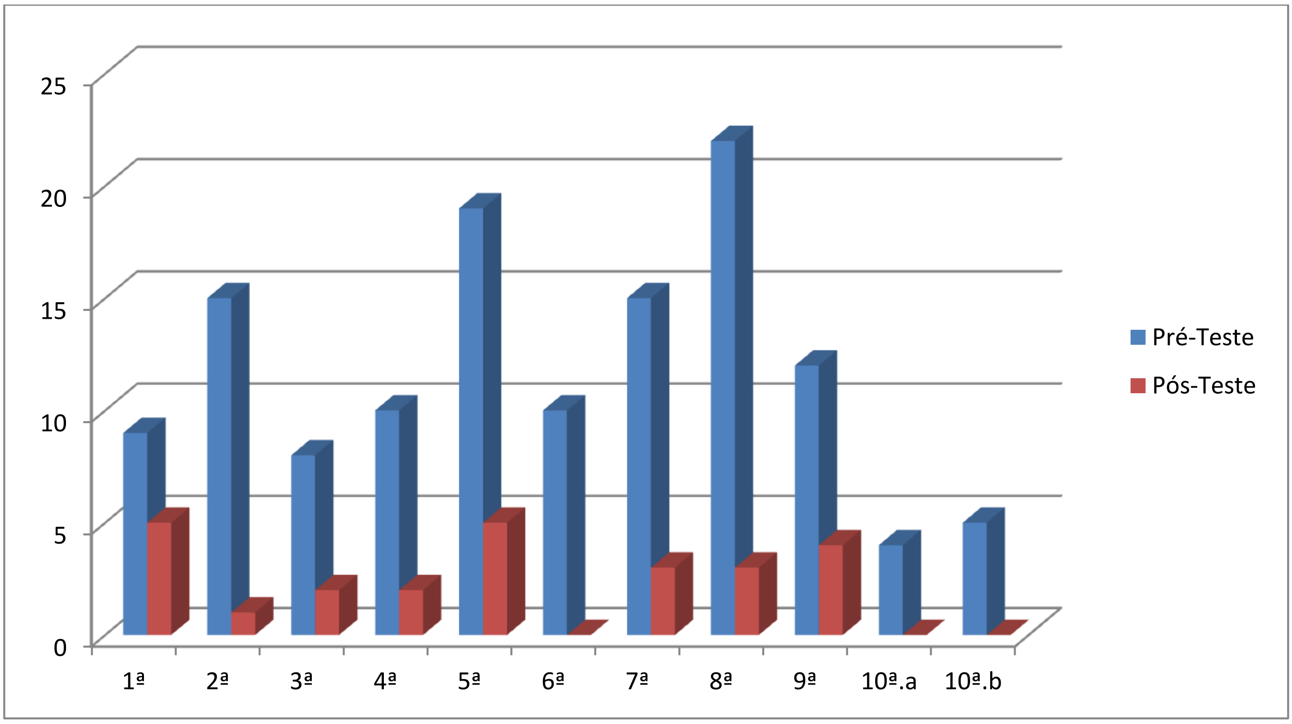
Acertos Parciais



Erros



Brancos



Ao compararmos o Pré-Teste com o Pós-Teste, percebemos que houve um avanço com relação à aplicação do Teorema de Pitágoras. Na primeira questão percebemos que o número de acertos totais foi bem maior no Pós-Teste, isto se deu, por que boa parte dos alunos conseguiram assegurar a condição de existência dos triângulos, porém na soma dos acertos parciais, erros e brancos, percebemos que muitos alunos ainda tem dificuldade, mas observado os gráficos acima percebemos que estes índices diminuíram consideravelmente com relação ao Pré-Teste. Na segunda, no que diz respeito a análise da questão, quase todos conseguiram matematizar a situação e perceberam que se tratava de uma aplicação do Teorema de Pitágoras, com isto o número de acertos totais e parciais foi bem maior, o número de erros e brancos caiu muito com relação ao Pré-Teste. A terceira questão foi uma das que tiveram o maior número de acertos totais e parciais, no Pré-Teste, porém no somatório dos erros e brancos o número também era elevado, no Pós-Teste, tiveram novamente um bom desempenho, diminuído o numero de erros e brancos, demonstraram um bom conhecimento da área do triângulo equilátero. Na quarta questão, os uma melhora significativa no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras e no calculo de áreas, basta observarmos os gráficos acima. A quinta questão, uma das que os alunos tiveram maior dificuldade no Pré-Teste, não ouve nenhum acerto total ou parcial, isto se deu, pois como já foi citado muitos não lembravam se quer como era a figura de um trapézio, muito menos como calcular sua área e, os que reconheciam um trapézio não sabiam usar os dados pra calcular sua área. Como em uma das aulas foi trabalhada a investigação da demonstração do Teorema de Pitágoras feita presidente Garfield, que usava a área do trapézio, isto os familiarizou com o mesmo e o número de acertos totais e parciais, foi consideravam, apesar ao número de erros serem iguais nos dois, no geram ouve um avanço importante. Nas questões seis, sete, oito e nove que se tratava de situações diretas de aplicações do Teorema de Pitágoras, no Pré-Teste, a maioria dos alunos mostraram conhecer o Teorema, porém, não sabiam aplica-lo, depois das atividades de investigações realizadas por eles, percebemos que ouve um grande avanço, em todas as questões citadas, os acertos totais ou parciais aumentaram vultuosamente. Chamamos atenção, para a questão oito, no Pré-Teste a grande maioria dos alunos deixam em branco, no Pós-Teste tiveram mais facilidade utilizar o Teorema de Pitágoras, para resolver o problema e a operacionalizar os resultados para chegar à resposta correta, com relação ao número de erros serem maior no Pós-Teste, isto se deu por que os alunos tentaram resolver o problema o que não aconteceu no Pré-Teste. Na ultima questão percebemos na forma descontextualizada do teorema o número de acertos foi bastante alta do que os de não acertos.

6. CONCLUSÃO

Na realização de nossa pesquisa lançamos mão de investigações matemáticas, com o intuito de alcançar os objetivos da pesquisa. A partir da comparação, entre os resultados do Pré-Teste e do Pós-Teste, podemos fazer algumas considerações importantes a respeito de nossa pesquisa que serão relatadas mais adiante.

Primeiramente, realizamos o Pré-Teste, nele tínhamos o propósito de identificar os conhecimentos dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras e de alguns conceitos de geometria plana. Ao analisarmos os resultados percebemos que a maioria tinha dificuldades em pensar as situações dadas matematicamente, muitos mostram conhecer os conteúdos abordados nas questões, porém não sabiam utiliza-los para resolver as situações dadas, não conseguiam matematizar a situação, com isto o número de erros e brancos foi bem elevado com relação aos acertos totais e parciais[44].

Dando continuidade a nossa pesquisa, diante dos resultados do Pré-Teste, utilizamos uma metodologia de ensino com a intenção de melhorar a aprendizagem dos alunos. Propomos cinco atividades investigativas de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras utilizando material concreto.

Na realização destas atividades, os alunos fazendo uso do método dedutivo, puderam formular e validar suas conjecturas. Isto foi muito significativo para a aprendizagem dos mesmos, a autonomia dada a eles para poderem explorar a atividade e realizar suas próprias descobertas, proporcionou um ambiente onde se sentiam seguros para expor os resultados alcançados. Este tipo de atividade gerou uma melhora na relação professor/aluno, pois os alunos tinham a oportunidade de se expressar e ao professor cabia apenas fazer intervenções para ajuda-lhos a progredir na atividade, com isto a integração entre o professor e os alunos melhorou positivamente, como um dos nossos objetivos específicos era identificar quais as modificações que acontecem na relação professor/aluno com o uso das investigações matemáticas, fica claro que melhora consideravelmente, pois a confiança entre ambos é mútua.

As atividades desempenhadas despertaram nos alunos um maior interesse pela Matemática, pois sua exploração contribuiu para desenvolver a capacidade de raciocínio e criatividades dos alunos, além de facilitar a construção de conceitos e técnicas matemáticas, ajudou a conscientizar os alunos que a Matemática é uma ciência em desenvolvimento em que o processo de investigação tem um papel fundamental.

[44] Observar o gráfico da avaliação das questões do Pré-Teste

Com relação às demonstrações do Teorema de Pitágoras, geralmente este teorema é imposto aos alunos, onde somente veem o resultado final da descoberta que e devem assimilar para uma posterior repetição, impossibilitando o acompanhamento do processo que produziu esta sentença tão utilizada na Matemática. Então as atividades trabalhadas na pesquisa desejava que os alunos experimentassem o aspecto da descoberta, para que pudessem sentir a necessidade de provar suas conjecturas, usando o espírito critico para interpretar e explicar os resultados alcançados.

Como os alunos não tinham maturidade lógica, os materiais concretos utilizados para os alunos explorarem a atividade, os ajudaram a experimentar e a se conscientizar da necessidade de provar o que tinham conjecturado, contribuindo para uma aprendizagem com compreensão do Teorema de Pitágoras e também potencializou o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Ao analisarmos as aulas, pudemos constatar que isto de fato aconteceu. Com isto, conseguimos alcançamos mais um dos objetivos específicos de nossa pesquisa, que propunha oferecer um ambiente de aprendizagem com compreensão em que os alunos pudessem propor e explorar suas ideias além de investigar as demonstrações do teorema de Pitágoras utilizando material concreto, como de fato ocorreu.

Depois das atividades de investigações com material concreto, realizamos o Pós-Teste, neste momento, os alunos estavam bem mais envolvidos em comparação com o Pré-Teste, logo que foi entregue o teste, a sua evolução se manifestou desde o inicio, pois ao resolver as situações propostas os alunos não procuravam a professora com frequência como era de costume, mostraram estar mais autônomos e seguros diante das situações que eram impostos.

Na análise do Pós-Teste, percebemos que a utilização de atividades investigativas de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, permitiu que os alunos progredissem cognitivamente, diante das situações onde era necessário aplicar o teorema em estudo, tiveram um desempenho melhor com relação ao Pré-Teste.

O objetivo geral desse trabalho era desenvolver atividades investigativas de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras utilizado materiais concretos para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem, estimulando o raciocínio lógico-dedutivo de cada aluno e fazer com os alunos refletissem sobre as suas aplicações. Fica evidente que, apesar de não ser imprescindível a utilização de investigações matemáticas, elas são importantes por proporcionar um ambiente de aprendizagem com melhor compreensão. Além disso, o aluno demonstra um maior interesse na disciplina, a relação professor/aluno melhora consideravelmente e é de fundamental importância para uma melhor compreensão do conhecimento.

O estudo das demonstrações do Teorema de Pitágoras por meio de atividades investigativas, nesta pesquisa, despertou os alunos para a importância que ele tem para a Matemática, pois a partir de sua utilização os alunos ampliaram sua concepção sobre o que é, e para que aprender este teorema, favorecendo a aprendizagem e adquirindo estratégias para aplicá-lo na resolução de problemas. Diante disso, conseguimos alcançar um dos objetivos de nossa pesquisa, que era propor uma reflexão acerca da grande relevância deste teorema no que se refere às suas aplicações.

É necessário destacar que um dos nossos objetivos específicos também era descrever como as investigações de algumas demonstrações do teorema de Pitágoras utilizando material concreto, contribuem para aprendizagem dos alunos. Então, diante dos resultados alcançados podemos descrever que, as investigações matemáticas aliadas com o uso do material concreto melhoram admiravelmente à aprendizagem dos alunos.

Visamos também com esta pesquisa repensar as velhas práticas de ensino, e repensar novas metodologias, onde a atenção esteja em facilitar a aprendizagem dos alunos. Dentro de nossa pesquisa que propôs a utilização da metodologia do uso de investigações matemáticas, conseguimos alcançar resultados satisfatórios que justificam o seu uso em sala de aula, pois atingimos os objetivos propostos na pesquisa; melhora do relacionamento entre professor/aluno, ambiente de aprendizagem com compreensão; e segurança na hora de aplicar o teorema em determinadas situações.

Portanto, fica evidente que fazendo uso dessa metodologia conseguimos criar um ambiente de aprendizagem com compreensão, facilitando o entendimento do Teorema de Pitágoras e, consequentemente, o processo de ensino-aprendizagem. Por estas razões podemos afirmar que nossa pesquisa foi profícua.

O ideal é que esta metodologia seja implantada de forma cautelosa, para não assustar os alunos, pois alguns dos processos matemáticos envolvidos na exploração de investigações matemáticas envolvem dificuldades para os alunos, por isto, o professor deve estar bem preparado e ter bem claro os objetivos que deseja alcançar ao utilizar determinada metodologia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMES. P. Uma professora de olho nas aplicações. In: BUSHAW, D. et al. *Aplicações da matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997. Pag. 10-17.

ARAUJO, F. *Teorema de Pitágoras: mais que uma relação entre áreas*. Universidade Federal da Bahia Instituto de Matemática, 2011. Disponível em < http://www.rpm.org.br/5e/docs/mc9.pdf> Acesso em 01 de junho, 2012.

BASTIAN, I. V.; ALMOULOUD, S.A. *O Teorema de Pitágoras: uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente.* In: Educação Matemática em Revista, SBEM, nº14, p.45-53, agosto 2003.

BASTIAN, I. V. *O Teorema de Pitágoras*. São Paulo: PUC, 2000. 229 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

BERLINGHOFF, W. P. e GOUVEA, F. Q. Um fato animador: O Teorema de Pitágoras. In:_______ *A matemática através dos tempos*. (2ª edição). Tradução de Elza F. Gomide, Helena Castro. São Paulo: Blucher 2010. Cap.12, p.143-150

BISHOP, A.J. & GOFFREE, A. J.. Dinâmica e Organização da sala de Aula. In: CHRISTIANSEN, B., HOWSON, G. & OTTE, M. (Orgs.). Perspectives on Mathematics Education. Tradução de José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte. Portugal: Editora D. Reidel,1986, p. 01-47

BOSCO, J. L.. Uma nova abordagem para a educação em matemática e ciências. In: SAMIRA, Z.. (Org.). *Revista Presença Pedagógica: edição especial educação matemática*. Belo Horizonte: Editora Dimensão, 2005.

BROCARDO, J. *As Investigações na Sala de Aula de Matemática*: um projeto curricular no 8.º ano. Tese (Doutorado). Universidade de Lisboa, 2001. Disponível em < http://repositorio.ul.pt >Acesso em 02 de Abril, 2012.

CÂNDIDO, P. T. *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática: Comunicação em Matemática***.** Organizado por Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHRISTIANSEN, B., & WALTHER, G. Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel, 1986, p.01-80

D'Ambrosio, B. S. Como ensinar matemática hoje?. In: *Revista Temas & Debates*. Santa Catarina: SBEM, 1994

EVES, H. Introdução a historia da matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: editora da Unicamp, 2004.

GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In: ABRANTES, P. et. al. (Orgs.) *Investigações matemáticas na aula e no currículo***.** Portugal, APM, 1999, p. 35-49.

IMENES, L. M. Vivendo matemática: descobrindo o teorema de Pitágoras. São Paulo, SP: Editora Scipione Ltda,1990.p.01-47.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores - Campinas*. SP: Autores Associados, 2006, p. 3-37.

MATOS, J. M. & SERRAZINA, M. L. *Recursos na aula de Matemática*. In:_______. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996. Cap.7, p.192-211.

MATOS, J. M. & SERRAZINA, M. L. Interacções Sociais na Aula de Matemática. In: _____________. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996. Cap.6, p.162-188.

MEDEIROS, K. M. *O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula*. Educação Matemática em Revista. Ano 8, n. 9, p. 32-39. 2001.

MEDEIROS, K. M. *Laboratório no ensino de matemática*. UEPB, 2003.

MELLO, E. G. S. *Demonstração: "Uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino de Geometria".* São Paulo: PUC, 1999. 189 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999. Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/elizabeth_g_mello.pdf> Acesso em 12 de Janeiro, 2012.

MENDES, I. A. *Matemática e Investigação em Sala de Aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Ed. rev. e aum. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

ONUCHIC, L. de L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

Parâmetros curriculares Nacionais, 1997.

PCN + ENSINO MÉDIO. *Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

POLLACK, H.O. O processo de aplicação da matemática. In: BUSHAW, Donald et al. *Aplicações da matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997,p.1-9

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., & ABRANTES, P. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação. 1997.

PONTE, João Pedro. *Gestão curricular em Matemática.* In: GTI (Ed.) O professor e o desenvolvimento curricular**.** Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P. *Investigações sobre investigações matemáticas em Portugal*. Investigar em Educação, 2, 93-169, 2003.

PONTE, J. P., BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M., & FERREIRA, C. *O trabalho do professor numa aula de investigação matemática*. Quadrante, 7(2), p.41-70, 1999.

Disponível em < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm> Acesso em 31 de maio, 2012.

RÊGO, R. M. & RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* Campinas, SP: Autores associados, 2006.

SANTALO, L. A. *Matemática para não-matemáticos*. In: CECILIA, P. e IRMA. S. (Orgs.). Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SINGH, S. O último teorema de Fermat. (13ª edição). Tradução Calife, J. L. Rio de Janeiro: Record, 2008.

SMOLE, K. S., DINIZ, M. I., PESSOA, N., ISHIHARA,C.. Os Jogos nas Aulas de Matemática do Ensino Médio. In:____________________ Caderno do Mathema: jogos de matemática de 1º a 3º ano. São Paulo, SP: Editora Armed, 2008, Cap.1, p.09-27.

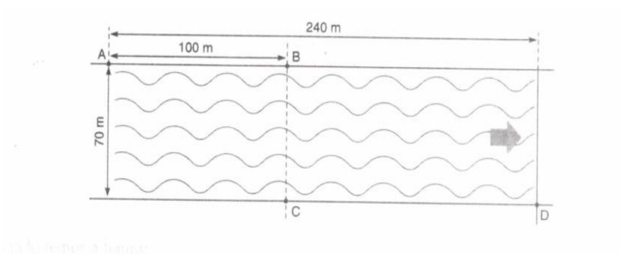
TRINDADE, Â. F. P. *Investigações matemáticas e resolução de problemas – que fronteiras?*.Tese (Mestrado). Universidade Federal do Paraná, 2008. Disponível em < http://dspace.c3sl.ufpr.br> Acesso em 03 de fevereiro, 2012.

YACKEL, E., & COBB, P. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*,*27*(4),1996, p.01-26

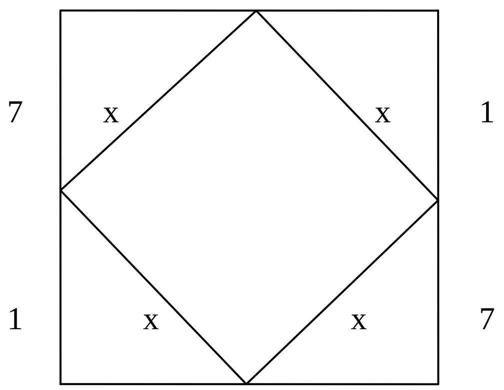
ANEXOS

PRÉ-PÓS TESTE

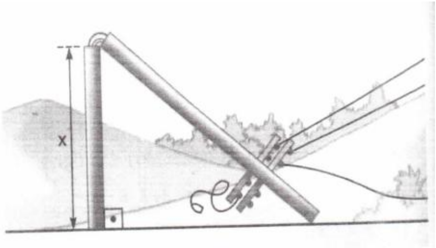
1. Em um triângulo, as medidas dos três lados são números inteiros. O maior dos lados tem 7 cm, e um dos outros dois lados mede 2 cm. Qual a medida do terceiro lado desse triângulo? Por que você escolheu este número?
2. (EEP-SP) Um cabo deverá ligar o ponto A, situado na margem esquerda do rio, ao ponto D, situado na margem direita do mesmo rio, 240 metros rio abaixo (como mostra a figura). Suponha que as margens do rio sejam paralelas e que sua largura seja de 70 metros. Este cabo deverá ser esticado pela margem esquerda do rio, de A até B, 100 metros rio abaixo. Do ponto B atravessará perpendicularmente a margem do rio para o ponro C. De C seguirá ao longo da margem direita até D. Calcule o cimprimento total do cabo e determine qual seria seu comprimento se ele fosse esticado de A até B.



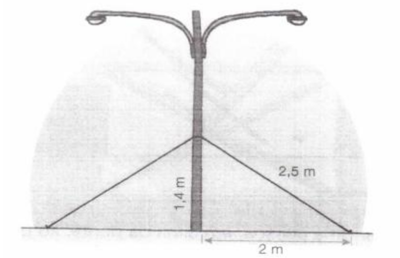
3. De uma placa de alumínio foi recortada uma região triangular equilátera de lado 20 cm. Qual é a área dessa região que foi recortada?
4. Aplique o teorema de Pitágoras para determinar a medida x do lado do quadrado destacado na figura. Em seguida, determine a área desse quadrado, sabendo que as medidas indicadas são dadas em centímetros.



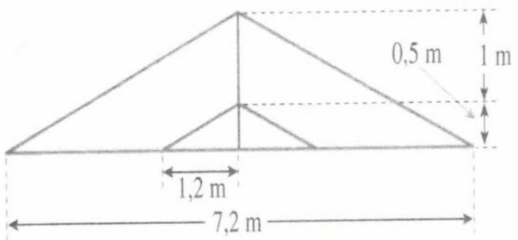
5. Determine a área aproximada da região limitada por um trapézio retângulo cujas bases medem 24 m e 52 m e a diagonal maior, 75m.
6. (UFpel-RS) Em um recente vendaval, um poste de luz de 9 m da altura quebrou-se em um ponto a uma distância x do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da base do mesmo. A que altura x do solo o poste quebrou?



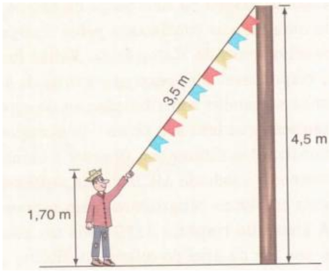
7. (OBMEP) Uma companhia de eletricidade instalou um poste num terreno plano. Para fixar bem o poste, foram pregados cabos no poste a uma altura de 1.4 metros do solo e a 2 metros da distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme mostra a figura. Um professor de matemática, após analisar estas medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta.



8. A figura abaixo representa a estrutura de madeira de telhado de uma residência. A base tem 7,2 m. Quantos metros de madeira são necessários para construir as outras partes dessa estrutura.

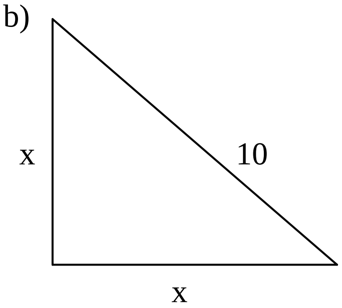


9. Para ajudar nas festas juninas de sua cidade, Paulo esticou completamente um fio de bandeirinhas, com 3,5 m de comprimento, até o topo de um poste com 4,5 m de altura. Sabemos que Paulo mede 1,70m; a que distância ele ficou do pé do poste?

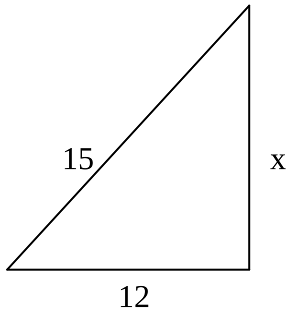


10. Calcule o valor de x aplicando o Teorema de Pitágoras

b)



b)



INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS UTILIZADAS NAS AULAS

PRIMEIRA AULA: Demonstração de Bhaskara do Teorema de Pitágoras

A atividade propunha:

1. Desenhe quatro triângulos iguais de catetos **b** e **c**, a hipotenusa **a**, recorte-os.
2. Desenhe e recorte um quadrado cujos lados sejam iguais a diferença entre os catetos do triângulo.
3. Com as cinco peças (4 triângulos e 1 quadrado), monte um quadrado de lado **a.**
4. Que modificações da subfigura-chave (o triângulo) são necessárias de modo que as hipotenusas dos triângulos se tornem lados do quadrado. Qual a expressão utilizada para calcular a área de cada triângulo retângulo e por que fazemos uso da mesma? E qual a expressão de área de cada quadrado?

5. Agora analisando a figura montada o que se pode concluir? Compare suas descobertas com as de seus colegas. Estabeleça conjecturas e justifique-as.

SEGUNDA AULA: Demonstração Hindu do Teorema de Pitágoras

A atividade propunha:

1. Desenhe e recorte um triângulo qualquer. Não importa as medidas de seus lados. Represente a medida dos lados por letras: **a** é a medida da hipotenusa: **b** e **c** são as medidas dos catetos. Em seguida, recorte outros três triângulos iguais ao primeiro.
2. Agora desenhe e recorte um quadrado, cujo lado seja à hipotenusa **a** dos triângulos retângulos.
3. Desenhe e recorte mais dois quadrados: um lado de lado **b** e outro de lado **c**.
4. Agora com o quadrado de lado **a** e os quatro triângulos, forme um quadradão. O que você conclui? Anote.
5. Usando agora os mesmos quatro triângulos e os dois quadrados de lados **b** e **c**, forme outro quadrado. O que você conclui? E qual a relação com o primeiro quadradão? Anote. Se você eliminar os quatros triângulos do primeiro quadradão, o que acontece? E se você eliminar os quatros triângulos do segundo quadradão, o que sobrará?
6. Comparando os dois quadrados, o que você conclui?
7. Escreva suas conjecturas e justifique-as?

TERCEIRA AULA: Demonstração do Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos

A atividade propunha:

1. Desenhe um triângulo retângulo e nomeie seus elementos:
    - Vértices?
    - Catetos?
    - Hipotenusa?
    - Altura relativa à hipotenusa?
    - Projeções dos catetos sobre a hipotenusa?

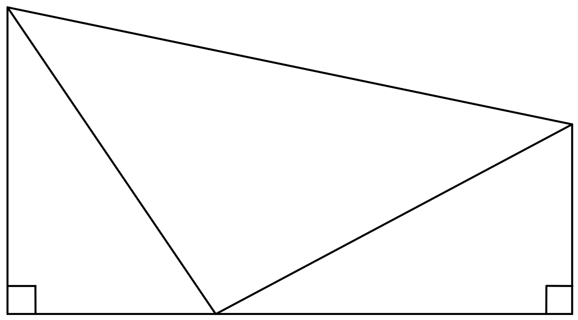
    Observe a figura. O que consegues detectar? Anote

2. Agora desenhe separadamente o que você detectou o que podes identificar? Faça suas conjecturas.
3. A partir daí, que relações você pode estabelecer entre as medidas deste triângulo. Investigue razões e proporções, adição dos membros e igualdade entre as relações encontradas.
4. Faça suas conjecturas e escreve-as.
5. Justifique as suas conjecturas.

QUARTA AULA: Demonstração do Teorema de Pitágoras feita pelo presidente Garfield

A atividade propunha:

1. Desenhe e recorte dois triângulos retângulos de mesma medida, determine seus catetos **b** e **c**, e sua hipotenusa **a**;
2. Monte a seguinte figura



3. Qual figura você obteve? Determine a área dessa figura. Que outra maneira pode-se encontrar a área desta figura? Que relação existe entre as áreas?
4. O que você conclui? Escreva suas conjecturas. Explique-as. Por que elas te parecem verdadeiras?

QUINTA AULA: Generalização do Teorema de Pitágoras

A atividade propunha:

1. Desenhe e recorte um triângulo retângulo qualquer. Não importa as medidas de seus lados. Represente a medida dos lados por letras: **a** é a medida da hipotenusa: **b** e **c** são as medidas dos catetos.
2. Agora desenhe e recorte um semicírculo para cada cateto do triângulo e um para a hipotenusa. Em seguida, sobreponha sobre cada cateto e sobre a hipotenusa um semicírculo.

3. Compare a soma das áreas dos semicírculos sobrepostos sobre os catetos com a área do semicírculo sobreposto sobre a hipotenusa.
4. Estabeleça suas conjecturas e as justifique.

ANEXO B – A BIOGRAFIA DE PITÁGORAS

Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C., na ilha grega de Samos, leste do Mar Egeu, foi uma das figuras mais influentes no século VI a.C. No entanto, como não existem relatos originais de sua vida e de seus trabalhos, sua vida esta envolta numa névoa de misticismo. Segundo Eves (2004), é provável que ele tenha sido discípulo de Tales, pois morava perto de Mileto, lugar onde Tales morava.

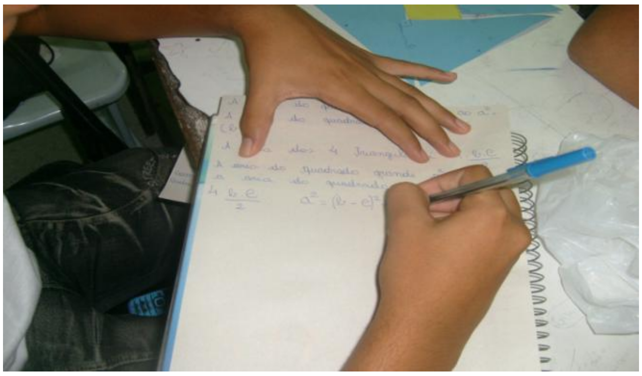
Muito moço, ainda empreendeu longas viagens ao Egito lá adquiriu muito de seu conhecimento matemático. Naquela época, as viagens ao oriente eram consideradas uma forma de ampliar a mente, aprendeu muitas técnicas matemáticas com os egípcios e babilônicos.

Vinte anos depois de tantas viagens, Pitágoras tinha assimilado todo o conhecimento matemático do mundo conhecido, voltou à sua terra com o propósito de fundar uma escola voltada ao estudo da filosofia e da matemática que conhecerá. Queria entender os números não apenas usá-los. Fundou sua escola pitagórica numa colônia grega situada no sul da Itália, pois ao retornar a Samos encontro o poder nas mãos de um tirano. O lema da escola pitagórica, “Tudo é Número”.

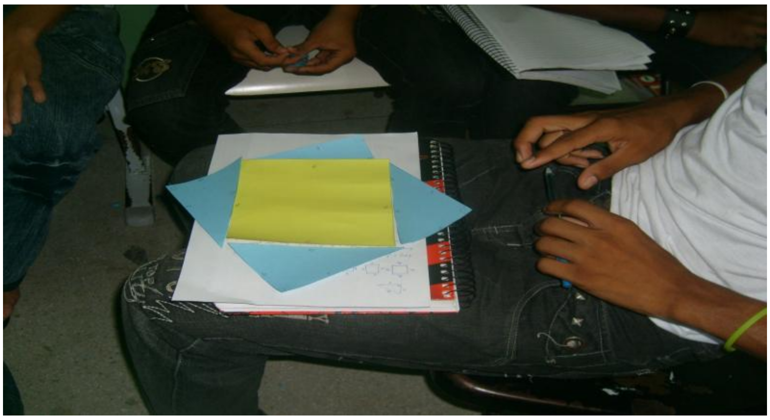
O grande mérito de Pitágoras teria sido a percepção que os números existem independentemente do mundo concreto. Isso significa que ele poderia descobrir verdades que eram independentes de preconceitos ou de opiniões.

REGISTRO DAS ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS DE ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES COM O TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO MATERIAL CONCRETO

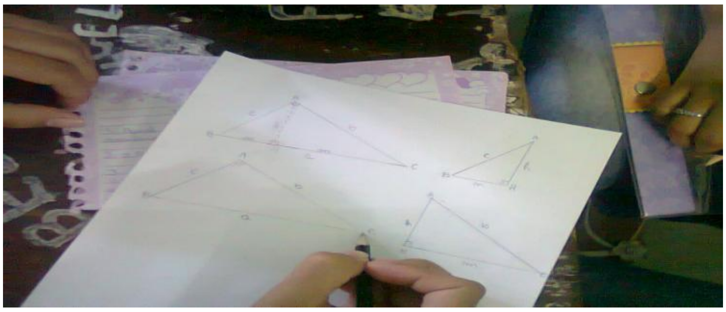
PRIMEIRA AULA: Demonstração de Bhaskara do Teorema de Pitágoras

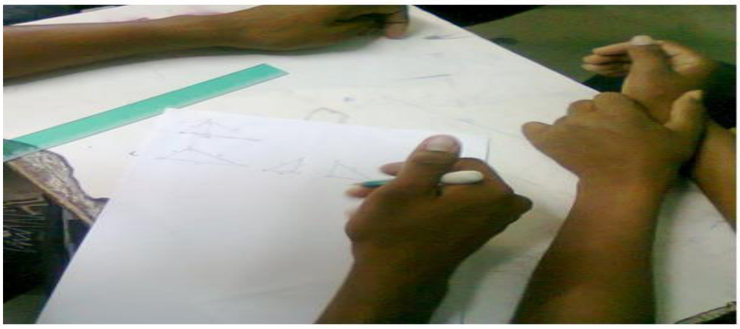


SEGUNDA AULA: Demonstração Hindu do Teorema de Pitágoras

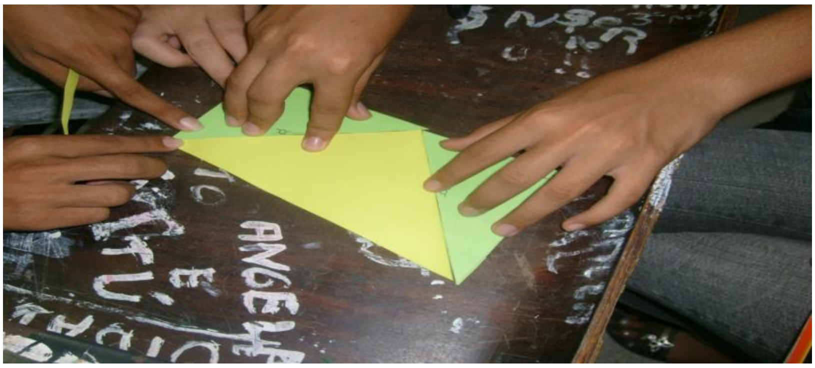


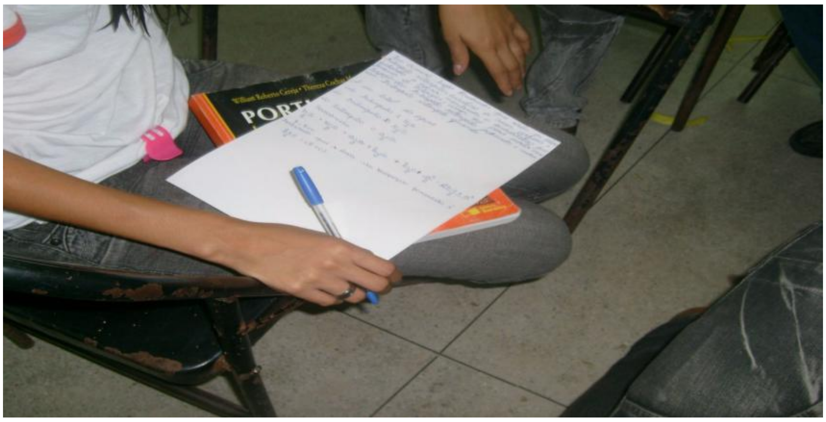
TERCEIRA AULA: Demonstração do Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos





QUARTA AULA: Demonstração do Teorema de Pitágoras feita pelo presidente Garfield





QUINTA AULA: Generalização do Teorema de Pitágoras