



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA

ANDERSON TIAGO NASCIMENTO DA SILVA

UM ESTUDO DA SOLUÇÃO DE HISCOCK PARA CORDAS  
CÓSMICAS

CAMPINA GRANDE - PB  
2016

ANDERSON TIAGO NASCIMENTO DA SILVA

UM ESTUDO DA SOLUÇÃO DE HISCOCK PARA CORDAS  
CÓSMICAS

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Graduação  
Licenciatura em Física da Universidade  
Estadual da Paraíba, em cumprimento  
à exigência para obtenção do grau de  
Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo  
Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB  
2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586e Silva, Anderson Tiago Nascimento da.  
Um estudo da solução de Hiscock para cordas cósmicas  
[manuscrito] / Anderson Tiago Nascimento da Silva. - 2016.  
26 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -  
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva,  
Departamento de Física".

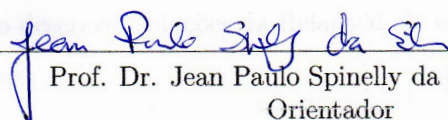
1. Defeitos topológicos. 2. Topologia. 3. Quebra espontânea  
de simetria. 4. Relatividade geral. 5. Solução de Hiscock. I.  
Título. 21. ed. CDD 514

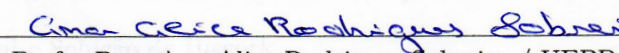
ANDERSON TIAGO NASCIMENTO DA SILVA

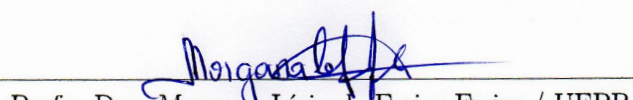
UM ESTUDO DA SOLUÇÃO DE HISCOCK PARA CORDAS  
CÓSMICAS

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Graduação  
Licenciatura em Física da Universidade  
Estadual da Paraíba, em cumprimento  
à exigência para obtenção do grau de  
Licenciado em Física.

Aprovado em 28/03/2016.

  
Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva / UEPB  
Orientador

  
Profa. Dra. Ana Alice Rodrigues Sobreira / UEPB  
Examinadora

  
Profa. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire / UEPB  
Examinadora

# UM ESTUDO DA SOLUÇÃO DE HISCOCK PARA CORDAS CÓSMICAS

SILVA, Anderson Tiago Nascimento da <sup>1</sup>

## RESUMO

Nos anos setenta surgiu a ideia da possibilidade da formação dos chamados defeitos topológicos. Teorias que explicam a evolução do universo, nos levam a acreditar que estes defeitos foram criados durante as transições de fase que ocorreram no Universo primitivo. Um desses defeitos é a corda cósmica. Acredita-se que as cordas cósmicas, se realmente existirem, podem ajudar a explicar os mecanismos que geram as estruturas que existem no Universo. Com o intuito de compreender a geometria gerada por um determinado tipo de defeito, no início dos anos oitenta, Alexander Vilenkin encontrou a métrica do espaço-tempo de uma corda cósmica idealizada, isto é, muito fina e com extensão infinita. Nesse trabalho, mostrou que o espaço-tempo fora da corda cósmica é localmente plano, porém, globalmente não é equivalente ao espaço-tempo de Minkowski. Mais tarde, com a finalidade de estender os resultados obtidos por Vilenkin e Hiscock resolveu as equações de Einstein para o caso particular em que o tensor energia-momento é constante, no interior da corda, e nulo, na região exterior. Neste contexto, este trabalho tem por objetivo de obter as soluções da Relatividade Geral para cordas cósmicas, semelhante as obtidas por Hiscock.

**PALAVRAS-CHAVE:** Defeitos Topológicos. Quebra de Espontânea de Simetria. Relatividade Geral. Solução de Hiscock.

---

<sup>1</sup>Graduando em Licenciatura em Física. Universidade Estadual da Paraíba.

# 1 Introdução

Cosmologia é a parte da física que tenta traçar um perfil da evolução do Universo, desde a época densa e quente, isto é, quando o Universo era composto de uma mistura de gás e radiação (fótons, bárions etc.) em equilíbrio térmico para o estado extremamente complexo e diversificado que vemos hoje: galáxias, estrelas e planetas concentrados em certas partes do céu e regiões vazias em outras. No Universo de hoje, o que observamos no céu, aglomerados e superaglomerados de galáxias, parecem ter sido formados a partir de pequenos desvios do equilíbrio no Universo primordial e a força da gravidade fez com que regiões mais densas (com mais matéria) se expandissem mais lentamente e se aglutinassem para formar os primeiros objetos (WUENSCHÉ, 2003).

De acordo com a Teoria da Relatividade Geral, proposta por Einstein em 1915, a estrutura geométrica do espaço-tempo é modificada pela presença de matéria e/ou energia contida nele, ou seja, temos uma curvatura no espaço (RESNICK, 1971). Toda informação geométrica do espaço-tempo está contida em um objeto matemático chamado de tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ , que, para determina-lo, precisamos resolver o conjunto de equações, denominado equações de Einstein. Tais equações possuem algumas particularidades que veremos a posteriori.

Diante disso, temos que um defeito topológico, como a corda cósmica, por exemplo, é capaz de induzir uma mudança na estrutura do espaço-tempo. De fato, resolvendo as equações de Einstein para o tensor energia-momento, associado a um determinado defeito topológico, podemos determinar a estrutura do espaço-tempo gerado por ela. O físico russo Alexander Vilenkin (1981) calculou a métrica do espaço-tempo de uma corda idealizada, isto é, muito fina e com extensão infinita que serviu de base para que Hiscock (1985) desenvolvesse um estudo mais amplo para o mesmo tipo de defeito.

A corda cósmica é um tipo de defeito topológico, ocasionado pela quebra espontânea de simetria e esta é o objeto principal de desenvolvimento do nosso trabalho. As cordas cósmicas são de grande importância quando se trata da área da gravitação e cosmologia,

pois desenvolvem um papel fundamental na descrição da formação das grandes estruturas presentes no Universo. Embora tenham suas origens nos primórdios dos tempos, as cordas cósmicas, nos dias atuais, formam um importante elo de ligação entre o Universo primitivo e o hodierno, formando ligações entre as regiões mais remotas de todo o cosmos. No intuito de melhor compreender a evolução e formação do Universo como um todo, vamos estudar sobre os efeitos gravitacionais produzidos por cordas cósmicas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: primeiro estudaremos as equações de Einstein, na qual descrevem o comportamento e as propriedades do campo gravitacional. Depois, veremos o conceito de simetria, no contexto da teoria do big bang, para podermos entender como a mesma é quebrada e suas consequências, tais como os defeitos topológicos. Posteriormente trataremos de um dos efeitos causados pela quebra espontânea de simetria, através da solução de Hiscock para cordas cósmicas. Finalizando, assim, com as conclusões do nosso estudo.

## **2 Fundamentação Teórica**

### **2.1 Relatividade geral e a expansão do universo**

A Teoria da Relatividade Geral foi publicada por Einstein em 1916, dez anos após a publicação da Relatividade Restrita na qual demonstrava que toda porção de matéria curva o espaço-tempo à sua volta e esta curvatura observada acaba gerando um campo gravitacional. Com isto, surgiu uma teoria que generaliza a relatividade restrita para o caso de referenciais não inerciais e reduz-se à Teoria da Gravitação de Newton no regime clássico, e ainda complementa esta última para incluir também o caso de grandes densidades de massa. Nesta teoria o conceito clássico de força gravitacional, dado pelas leis de gravitação de Newton como resultado da interação entre massa, é substituído pela geometria espaço-temporal, ou seja, a gravitação passa a ser explicada como uma manifestação da própria curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de massa, ou

energia. A equação dinâmica que descreve a forma como a matéria e energia modificam a geometria do espaço-tempo é chamada Equação de Campo de Einstein (DELBEM, 2010).

As equações propostas por Einstein são chamadas de “equações de campo” porque elas descrevem o comportamento e as propriedades do campo gravitacional. Elas têm a forma<sup>2</sup>:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (2-1)$$

sendo  $G$  a constante da gravitação,  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico,  $T_{\mu\nu}$  o tensor de energia-momento associado à matéria,  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  o escalar de Ricci e  $R_{\mu\nu}$  o tensor de Ricci.<sup>3</sup>

No vácuo, as equações (2-1) tomam a forma

$$R_{\mu\nu} = 0 . \quad (2-2)$$

Vale a pena ressaltar que o espaço-tempo vazio, não é, necessariamente, um espaço-tempo plano. Quando as equações de campo de Einstein no vácuo são satisfeitas, o tensor de Riemann é, então, igual ao tensor de Weyl, que é, em geral, diferente de zero. Somente quando todas as componentes do tensor de Riemann são nulas é que o espaço-tempo é plano.

Einstein acreditava que o universo era estático. Então, ele introduziu uma constante cosmológica  $\Lambda$ , e reescreveu suas equações como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (2-3)$$

Quando a constante é positiva, ela age como uma força de repulsão que se opõe a gravitação universal com a finalidade de reduzir o efeito dinâmico da gravidade, ou seja, sua possível expansão, mas não a curvatura do espaço.

É importante notar que um universo que é estático em um determinado instante de tempo não é necessariamente estático em momentos anteriores ou posteriores a este. Um

---

<sup>2</sup>Estamos usando o sistema de unidade no qual  $c = 1$

<sup>3</sup>O tensor de Ricci é dado por  $R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\rho}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^{\rho}$ , em que  $\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}$  são os símbolos de Christoffel, definidos por  $\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta} \left( \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right)$



outro ponto importante é que para assegurar que o universo permaneça estático, em um estado de equilíbrio, Einstein mostrou que a curvatura do universo deve ser positiva. O universo estático de Einstein é, portanto, um espaço esférico, ou seja, ele é fechado, finito e contém uma misteriosa força  $\Lambda$  que compensa a atração gravitacional.

Friedmann foi o primeiro a perceber que havia um equívoco no artigo em que Einstein propõe um universo estático, publicado em 1917. Em uma carta para Einstein, Friedmann mostrou suas conclusões mais gerais, porém não conseguiu qualquer resposta. Somente após a interferência de um amigo, que estava visitando Berlin, é que Friedmann obteve de Einstein uma carta que ele chamou de “carta irritada”, na qual Einstein concordava com as conclusões de Friedmann, fazendo com que ele publicasse em 1922, na conceituada revista científica alemã *Zeitschrift für Physik*, um importante artigo chamado “Sobre a Curvatura do Espaço”. Em 1924 ele publicou, nesta mesma revista, um segundo artigo chamado “Sobre a Possibilidade de um Universo com Curvatura Negativa Constante”.

Embora esses artigos tenham sido publicados em uma das mais importantes revistas científicas da época, eles foram praticamente ignorados pela comunidade científica. Somente em 1927 e que o abade francês George Lemaitre redescobriu as equações originalmente formuladas por Friedmann e a cosmologia entrou em uma nova era. Nos tempos atuais, em homenagem ao trabalho pioneiro, chamamos os universos de constante cosmológica zero, e que se expandem uniformemente, como sendo universos de Friedmann.

Agora vamos descrever os universos de Friedmann<sup>4</sup>.

Se o Universo nos parece ser o mesmo em todas as direções espaciais quando olhamos para grandes escalas, é razoável admitir que também assim seja visto de qualquer outro ponto do espaço. Na verdade, partindo deste princípio cosmológico que nos diz que não há nada de particularmente especial na nossa posição como observadores, somos levados a restringir a geometria do espaço-tempo aos casos em que a curvatura é constante em todos os pontos do espaço, em cada instante do tempo cósmico. Isso significa modelos geométricos com homogeneidade e isotropia espacial e o Universo só pode adotar uma de

---

<sup>4</sup>Todos os universos de Friedmann começam com “Big Bangs”

3 possíveis geometrias, consoante a curvatura das superfícies espaciais.

Na cosmologia, que surge a partir das equações relativísticas da gravitação, a curvatura do espaço é definida pela expressão

$$K = \frac{k}{\mathcal{R}^2}, \quad (2-4)$$

em que  $k$  é a conhecida constante de curvatura e  $\mathcal{R}$  é o fator de escala do universo. A constante de curvatura  $k$  tem sempre um dos três possíveis valores, ou seja,  $k = 0$  ou  $k = +1$  ou  $k = -1$  (ISLAN, 1992; DELBEM, 2010).

Quando  $k = 0$ , o espaço-tempo que se expande é plano, infinito e não limitado. Esse modelo de Universo é o mais simples de todos os Universos conhecidos, mas não foi considerado nem por Friedmann nem por Lemaître, sendo primeiro proposto por Einstein e de Sitter em 1932. Mesmo assim ele é conhecido ou como universo de Friedmann de curvatura zero ou universo de Einstein-de Sitter. Nesse Universo, as partículas presentes seguem órbitas parabólicas e têm velocidades iguais às suas velocidades de escape.

No caso em que  $k = +1$ , o espaço-tempo que se expande é esférico, finito e não limitado. Esse Universo se expande até um tamanho máximo e então colapsa. Ele é, portanto, do tipo “grande explosão”-“grande explosão” (“Big Bang”-“Big Bang”). Portanto, só existe somente por um período finito de tempo. Em uma descrição newtoniana do Universo, esse modelo de Friedmann corresponderia a uma bola que se expande e em seguida colapsa. Nele, as partículas, em queda livre, seguem órbitas elípticas e têm velocidades menores do que suas velocidades de escape.

Por fim, na situação em que  $k = -1$ , o espaço-tempo que se expande é hiperbólico, infinito e não limitado, se expande continuamente e dura por um período infinito de tempo no futuro. Em uma descrição newtoniana do Universo, esse modelo de Friedmann também corresponderia a uma bola que se expande continuamente. Nele, as partículas presentes seguem órbitas hiperbólicas e têm velocidades maiores do que suas velocidades de escape.

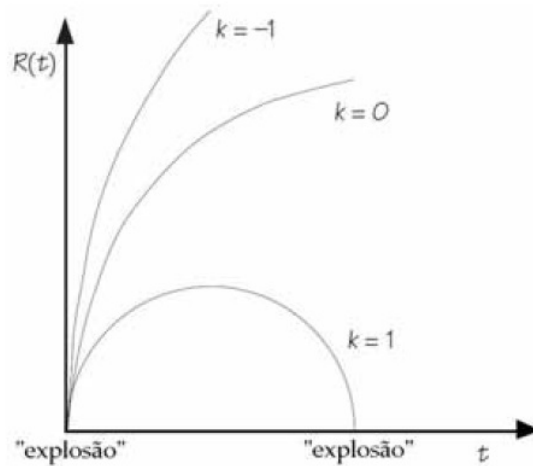


Figura 1: Fator de Escala da variação do tamanho do Universo com o tempo para diferentes geometrias

## 2.2 Defeitos Topológicos

### 2.2.1 O conceito de simetria

Diversas áreas da ciência moderna têm o conceito de simetria como algo fundamental. Na Física de partículas, por exemplo, as considerações de simetria são utilizadas para se derivar as leis de conservação e determinar quais as interações que podem ocorrer entre as partículas. O conceito de simetria também tem aplicações em muitas outras áreas como, por exemplo, a teoria da Relatividade, a Mecânica Quântica, a Espectroscopia e a Química.

Formalmente, a simetria é definida como *invariância* com respeito a um grupo especificado de transformações. Em outras palavras, um conjunto de equações é simétrico quando mantém a mesma forma frente a um determinado grupo de transformações. Por exemplo, a segunda lei de Newton, nos casos em que a força é função apenas da distância, é invariante quando efetuamos as transformações  $x' = x + vt$  e  $t' = t$  (RESNICK, 1971). Dito de outra forma, as equações da Mecânica Newtoniana são simétricas por transformações de Galileu do espaço-tempo.

Em geral, dado um conjunto de equações da Física, podemos derivar as suas

propriedade de simetria, isto é, o grupo de simetria que o deixa invariante. Contudo, o conceito de simetria pode ser usado no sentido contrário. Ao invés de derivarmos os princípios de invariância das leis de movimento, podemos tentar deduzir as equações da Física a partir de determinados princípios de simetria. Como exemplo, podemos citar as equações da Mecânica Relativística. De fato, no final do século XIX, a invariância das equações da Mecânica por transformações de Galileu era algo conhecido; também se sabia que as leis do eletromagnetismo são invariantes por transformações de Lorentz. Então, Einstein usou o conceito de invariância no sentido inverso e procurou as equações da Mecânica que ficavam invariantes por transformações de Lorentz (HORVATH et al, 2007).

### 2.2.2 Quebra espontânea de simetria

A Lagrangeana de uma teoria nos permite, além de obter as equações de campo, identificar as leis de conservação. Isto nos faria pensar que, nas soluções das equações de campo, encontraríamos as mesmas simetrias exibidas na Lagrangeana. Porém, este aspecto nem sempre é verificado. Um dos mecanismos que mostra este descompasso, exclusivamente utilizado na teoria de campos, é chamado de *quebra espontânea de simetria*.

Para entendermos com isto funciona, consideremos uma vara em pé, e uma força flexível no extremo que a comprime contra o solo. À medida que aumentarmos a força, chegará um momento em que a vara se curvará e formará um arco numa certa direção. Se escrevermos as equações de movimento clássicas, veremos que ela não contém o ângulo azimutal  $\theta$ , uma vez que a força é vertical e independente deste. Contudo, sabemos que a vara “escolheu” uma certa direção, digamos  $\theta = \theta_0$ . Logo, embora a Lagrangeana do sistema seja simétrica em relação à direção azimutal, a solução das equações não é. Podemos, então, afirmar que houve, por parte da solução, uma quebra espontânea de simetria contida na dinâmica. Naturalmente, esse exemplo clássico não corresponde totalmente às características de uma quebra de simetria na teoria de campos, mas ilustra

o que estamos querendo dizer com essa ideia (HORVATH et al, 2007).

Nas teorias modernas das partículas elementares, a quebra espontânea de simetria é descrita em termos de campos escalares, geralmente chamados de *campos de Higgs*. Em tais teorias a quebra ocorre quando o estado fundamental não exibe todas as simetrias da densidade de Lagrangeana, assim como acontece no sistema acima citado (VILENKIN e SHELLARD, 1994).

As características de uma quebra espontânea de simetria podem ser ilustradas em um modelo simples, primeiramente estudado por Goldstone (1961). A densidade de Lagrangeana deste modelo é:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi)^* - V(\varphi) \ , \quad (2-5)$$

em que  $\varphi$  é um campo escalar complexo e o potencial é dado por:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} (|\varphi|^2 - \eta^2)^2 \ , \quad (2-6)$$

onde  $\lambda$  e  $\eta$  são constantes positivas. Este modelo é invariante sob o grupo  $U(1)$  das transformações globais de fase,

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x) \ . \quad (2-7)$$

Sendo que, aqui, o termo “global” significa que  $\alpha$  não depende da localização no espaço-tempo,  $x$ .

Se o fator  $m^2 \equiv \lambda\eta^2/2$ , que multiplica o termo quadrático  $|\varphi|^2$ , fosse negativo, o modelo seria o de um campo escalar complexo de massa  $m$  que interage com si próprio através do potencial  $V(\varphi)$ . Porém, neste caso, já não podemos interpretar  $m$  como a massa, uma vez que esta seria imaginária. Contudo, podemos sempre considerar o termo quadrático como parte do potencial.

O estado fundamental do sistema (vácuo) é aquele em que a energia é mínima. Minimizando o potencial, vemos que tal estado é infinitamente degenerado e é dado por  $\varphi_0 = \eta e^{i\theta}$ , em que  $\theta$  é um número arbitrário. Dito de outra forma, os estados de vácuo

constituem o círculo  $|\varphi_0|^2 = \eta^2$ , conforme apresenta-se na Figura 2. Naturalmente, para “alcançar” o estado de vácuo, o sistema deverá “cair” em um dos possíveis mínimos. Esta situação é análoga ao caso anterior da vara, e constitui um exemplo de quebra espontânea de simetria.

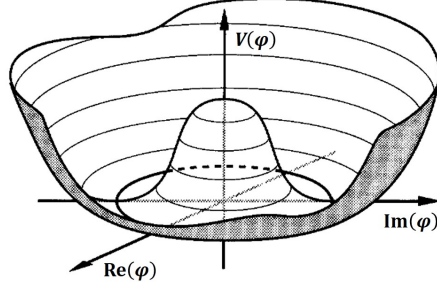


Figura 2: Potencial mínimo  $V(\varphi)$  com estado de vácuo degenerado

Fazendo uma análise mais aprofundada do fenômeno, poderíamos nos fazer a seguinte pergunta: que tipo de teoria resulta depois que a simetria é quebrada? Para respondermos este questionamento, deveremos fazer uma perturbação em torno de um mínimo do potencial. Escolhendo, por simplicidade,  $\theta = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \eta$ , a perturbação será dada por:

$$\varphi(x) = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] , \quad (2-8)$$

em que o termo  $[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)]/\sqrt{2}$  representa o comportamento do campo de Higgs em torno do mínimo. Então, substituindo a Eq. (2-8) na (2-5), encontramos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\varphi_1^2 + \mathcal{L}_{int} . \quad (2-9)$$

Onde a Lagrangeana de interação,  $\mathcal{L}_{int}$ , inclui termos de ordem cúbica e maiores em  $\varphi_1(x)$  e  $\varphi_2(x)$ . Da equação anterior, vemos que o campo  $\varphi_1(x)$  possui massa dada por  $m = \sqrt{\lambda}\eta$ , enquanto que o campo  $\varphi_2(x)$  não possui massa e representa o bóson de Goldstone. Além disso, podemos observar que a Lagrangeana não apresenta mais a sua simetria original, ou seja, não é mais invariante segundo a transformação da Equação (2-7). Isto mostra, mais uma vez, que houve uma quebra espontânea de simetria.

### 2.2.3 Como os defeitos de formam

Atualmente, os físicos de partículas e os cosmólogos buscam uma teoria que seja capaz de unificar todas as interações fundamentais da natureza. Em todas as principais teorias candidatas, o ingrediente essencial é o conceito de quebra de simetria.

As experiências mostram que há quatro forças físicas na natureza. Além de gravidade, existem as chamadas forças forte, fraca e eletromagnética. Perto de a singularidade do hot Big Bang, quando as energias eram bastante elevadas, acredita-se que essas forças eram unificadas. Contudo, à medida que o universo se expandiu e arrefeceu-se, a interação gravitacional, em seguida, a interação forte, e por fim as forças fraca e eletromagnética teriam se desacoplado do regime unificado e adotado suas identidades atuais, em uma série de quebras de simetria.

Os físicos teóricos ainda estão lutando para entender como a gravidade pode se unir com as outras interações. Contudo, no que se refere as forças forte, fraca e eletromagnética, já existem teoria plausíveis. Tais teorias foram corroboradas pelo fato que partículas portadoras de força, cuja existência demonstrada a unificação fundamental das forças fraca e eletromagnética em uma força primordial “eletrofraca”, os bósons W e Z, foram descobertos no CERN, o laboratório europeu acelerador, em 1983.

No contexto da teoria do big bang, as quebras espontâneas das simetrias fundamentais são vistas como transições de fase que ocorreram no início do universo. Em cada uma dessas transições o espaço-tempo é “orientado” pela presença de um campo escalar de força hipotético que permeia todo o espaço. Esta orientação do campo sinaliza a transição de um estado de maior simetria para um estado final, onde o sistema em consideração obedece a um grupo menor de regras de simetria. Na verdade, à medida que o universo esfria, o campo pode optar por diferentes estados fundamentais, também referido como diferentes estados de vácuo da teoria. Porém, quando o campo assume um valor finito, a simetria é quebrada, dando origem aos defeitos topológicos.

Com o intuito de entendermos o mecanismo de quebra de simetria, durante a evolução

do universo, consideraremos o modelo descrito na seção anterior. Contudo, uma vez que o universo primordial era denso e quente, devemos levar em conta o efeito da temperatura. Fazendo isso, encontramos que o potencial efetivo do referido modelo, para altas temperaturas, é dado por (VILENKIN e SHELLARD, 1994):

$$V_T(\varphi) = m^2(T) |\varphi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\varphi|^4, \quad (2-10)$$

sendo

$$m^2(T) = \frac{\lambda}{12} (T^2 - 6\eta^2) \quad (2-11)$$

a massa efetiva do campo.

Tomando  $m^2(T) = 0$ , encontramos a chamada temperatura crítica,

$$T_c = \sqrt{6\eta}. \quad (2-12)$$

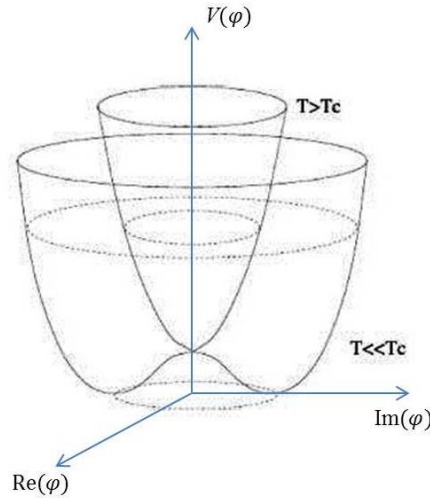


Figura 3: Gráfico do potencial efetivo mostrando que a quebra de simetria ocorre apenas quando  $T < T_c$ .

Para temperaturas acima da crítica, o termo de massa,  $m^2(T)$ , é positivo e o potencial possui apenas um mínimo, que acontece quando o campo escalar é nulo. Por outro lado, quando a temperatura torna-se menor que a temperatura crítica, o termo de massa assume um valor negativo, e, como consequência, surge um conjunto de mínimos. Abaixo de  $T_c$ ,



o valor  $\varphi = 0$  deixa de ser o mínimo global e o sistema escolherá espontaneamente um novo (inferior),  $\varphi = \eta \exp(i\theta)$ , para um certo ângulo  $\theta$ . Esta escolha sinaliza a quebra da simetria de uma transição de fase cósmica e a geração de regiões que representam os possíveis valores de mínimo do campo. Em um cenário cosmológico, a fusão desses domínios dá origem aos defeitos cósmicos (GANGUI, 2003).

A figura 3, a qual descreve o comportamento de  $V_T$  para as situações em que  $T > T_c$  e  $T \ll T_c$ , mostra que, abaixo da temperatura crítica, o potencial assume a forma daquele em que ocorre a quebra espontânea de simetria, confirmando nossas discussões acima.

### 3 Solução de Hiscock para cordas cósmicas

De acordo com os tipos de simetrias que são quebradas podem formar-se vários tipos de defeitos topológicos, entre os quais podemos citar as paredes de domínio, as cordas cósmicas, os monopolos e as texturas (VILENKIN e SHELLARD, 1994).

Em particular, as cordas cósmicas são objetos unidimensionais que se formam quando uma simetria axial ou cilíndrica é quebrada. São muito finas e extremamente massivas, e podem-se estender ao longo do Universo visível (KIBBLE, 1980). Se estas cordas realmente existirem, acredita-se que elas podem ajudar a explicar os mecanismos que geram as estruturas que existem no Universo (VILENKIN, 1981; KIBBLE, 1980).

O campo gravitacional de uma corda cósmica foi primeiramente calculado por Vilenkin (1981). Usando as equações linearizadas da Relatividade Geral, ele mostrou que o espaço-tempo exterior à corda infinita, muito fina e cilíndricamente simétrica difere do de Minkowski apenas globalmente, e corresponde ao espaço de Minkowski a menos de uma fatia compreendida pelo ângulo  $8\pi\mu$ , em que  $\mu$  é a densidade linear de energia (massa por unidade de comprimento) da corda. Pouco tempo depois, Hiscock (1985) estendeu este resultado, resolvendo as equações “completas” da Relatividade Geral para o caso em que a corda cósmica apresenta uma estrutura interna.

Nesta seção, apresentaremos a solução obtida por Hiscock. Contudo, usaremos uma

abordagem ligeiramente diferente daquela que foi apresentada por ele.

O elemento de linha do espaço-tempo da corda cósmica infinita é dado por:

$$ds^2 = A(\rho)^2(dt^2 - dz^2) - d\rho^2 - C(\rho)^2d\theta^2 . \quad (3-13)$$

Além disso, tensor energia-momento associado a esta corda é

$$T_{\nu}^{\mu} = \sigma(\rho)diag(1, 0, 0, 1) , \quad (3-14)$$

onde  $\sigma(\rho) = \sigma_o$ , para  $\rho < \rho_o$  e  $\sigma(\rho) = 0$ , para  $\rho > \rho_o$ , sendo que  $\rho_o$  é o raio da corda.

Para este elemento de linha, as componentes não nulas do símbolo de Christoffel são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{A(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} , & \Gamma_{00}^1 &= A(\rho) \frac{dA(\rho)}{d\rho} , & \Gamma_{22}^1 &= C(\rho) \frac{dC(\rho)}{d\rho} , \\ \Gamma_{33}^1 &= -A(\rho) \frac{dA(\rho)}{d\rho} , & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{C(\rho)} \frac{dC(\rho)}{d\rho} & \text{e} & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{01}^0 . \end{aligned} \quad (3-15)$$

Levando em conta os resultados acima e usando a métrica da Equação (3-13), podemos mostrar que as componentes não nulas do tensor de Ricci são dadas por:

$$R_0^0 = R_3^3 = \frac{1}{A(\rho)} \frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{A^2(\rho)} \left[ \frac{dA(\rho)}{d\rho} \right]^2 , \quad (3-16)$$

$$R_1^1 = \frac{2}{A(\rho)} \frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2C(\rho)}{d\rho^2} , \quad (3-17)$$

e

$$R_2^2 = \frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2C(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho} . \quad (3-18)$$

As equações de Einstein (2-1) podem ser reescritas como:

$$R_{\mu}^{\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} T \right) . \quad (3-19)$$

Então, substituindo a Equação (3-14) e (3-16)-(3-18) na Equação (3-19), chegamos às seguintes equações diferenciais:

$$\frac{1}{A(\rho)} \frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{A^2(\rho)} \left[ \frac{dA(\rho)}{d\rho} \right]^2 = 0 , \quad (3-20)$$

$$\frac{2}{A(\rho)} \frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 C(\rho)}{d\rho^2} = -8\pi G\sigma(\rho) \quad (3-21)$$

e

$$\frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 C(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho} = -8\pi G\sigma(\rho) . \quad (3-22)$$

Por outro lado, a conservação do tensor energia-momento nos fornece:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0 . \quad (3-23)$$

Tomando  $\nu = 1$  na expressão acima e usando (3-15), chegamos a conclusão que  $A(\rho)$  é uma constante, na qual os cálculos para esta afirmação encontra-se no anexo, e que pode, sem nenhuma perda de generalidade, ser escolhida como sendo igual a unidade. Na verdade, esta liberdade de escolha está associada ao fato que podemos fazer uma mudança na coordenada  $\rho$  que seja capaz de “absorver” a constante. Logo, usando o fato de  $A(\rho)$  ser uma constante, na Equação (3-22), encontramos que:

$$\frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 C(\rho)}{d\rho^2} = -8\pi G\sigma(\rho) . \quad (3-24)$$

### 3.1 Solução no exterior da corda

Temos que a densidade linear da corda sobre a superfície  $t$  e  $z$  constantes, é dada pela seguinte integral:

$$\mu = \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{g} T_0^0 . \quad (3-25)$$

Substituindo a componente 00 do tensor energia momento e o determinante da métrica, obtemos:

$$\mu = \frac{1}{4G} \left[ 1 - \frac{dC(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} \right] . \quad (3-26)$$

De acordo com a Equação (3-14), o tensor energia-momento na região exterior à corda é nulo, isto é,  $\sigma(\rho) = 0$ . Conseqüentemente, usando este fato na Equação (3-24) vemos que  $dC/d\rho$  é constante. Assim, podemos escrever a equação acima da seguinte maneira:

$$\mu = \frac{1}{4G} \left[ 1 - \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right] \quad (3-27)$$

Logo, separando as variáveis e integrando, deduzimos que:

$$C(\rho) = (1 - 4\mu G) \rho . \quad (3-28)$$

Daí, escrevemos a métrica da corda cósmica como sendo:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - (1 - 4\mu G)^2 \rho^2 d\theta^2 - dz^2 . \quad (3-29)$$

Quando  $\mu \rightarrow 0$ , na equação acima, se reduz a métrica de Minkowski em coordenadas cilíndricas, o que significa que não há corda cósmica. Contudo, percebe-se que mesmo quando  $\mu \neq 0$  o espaço-tempo é localmente plano. De fato, se fizermos a mudança de coordenadas  $\theta' = (1 - 4G\mu)\theta$ , a métrica da Equação (3-29) adquire a seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta'^2 - dz^2 , \quad (3-30)$$

na qual o ângulo  $\theta'$  varia entre 0 e  $2\pi(1 - 4G\mu)$ . Deste modo, percebe-se que o espaço-tempo dado pelo elemento de linha da Equação (3-30) é localmente plano, exceto em  $\rho = 0$ . Logo, a métrica da corda difere da métrica de Minkowski apenas globalmente e que, localmente, a menos de uma fatia compreendida em um ângulo de  $8\pi G\mu$ , elas correspondem uma a outra.

### 3.2 Solução no interior da corda

Segundo a Equação (3-14), no interior da corda temos que  $\sigma(\rho) = \sigma_0$ . Assim, podemos reescrever a Equação (3-24) da seguinte maneira:

$$\frac{d^2 C}{d\rho^2} + 8\pi G \sigma_0 C(\rho) = 0 \quad (3-31)$$

Esta é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, como coeficientes constantes, e sua solução geral é:

$$C(\rho) = \alpha \cos\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) + \beta \sin\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) , \quad (3-32)$$

em que  $\rho_*^{-2} \equiv 8\pi G \sigma_0$ .

A métrica da Equação (3-13) deve ser aproximadamente igual a do espaço-plano quando  $\rho \approx 0$ . Para que isto aconteça é necessário que, nessa região, todas as componentes do tensor de Riemann sejam nulas e que as componentes da métrica devem corresponder às da métrica do espaço de Minkowski, escritas no sistema de coordenadas cilíndricas.

Ao calcularmos o tensor Riemann, quando  $\rho \approx 0$ , vemos que existe uma componente não nula, a qual é dada por:

$$R_{2323} \approx \frac{\alpha^2}{\rho_*^2} . \quad (3-33)$$

Então, para que o espaço seja plano, devemos fazer  $\alpha = 0$ .

Com esta informação, a métrica da Equação (3-13) toma a seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \beta \text{sen}^2 \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right) d\theta^2 - dz^2 . \quad (3-34)$$

Porém, sabemos que, quando  $\rho \approx 0$ ,  $\text{sen}(\rho/\rho_*) \approx \rho/\rho_*$ . Então, a exigência de que as componentes da métrica (3-13) correspondam à métrica de Minkowski, na situação em que  $\rho \approx 0$ , faz com que escolhamos  $\beta = \rho_*^2$ . De fato, fazendo esta escolha, temos:

$$\rho \approx 0 : \quad \beta \text{sen}^2 \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right) \approx \beta \frac{\rho^2}{\rho_*^2} = \rho_*^2 \frac{\rho^2}{\rho_*^2} = \rho^2 . \quad (3-35)$$

Portanto, usando esse resultado, chegamos a:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho_*^2 \text{sen}^2 \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right) d\theta^2 - dz^2 . \quad (3-36)$$

A Equação (3-36) representa a geometria da região interior da corda cósmica na Teoria da Relatividade Geral, onde a métrica corresponde à métrica de Minkowski quando  $\rho \approx 0$ . Logo, percebemos que a geometria do espaço-tempo sofre uma modificação na presença deste defeito topológico.

## 4 Conclusões

Nosso trabalho foi desenvolvido com foco em um tipo de defeito gravitacional, a corda cósmica. Optamos por trabalhar com esse tipo de defeito devido à sua importância

fundamental para uma possível explicação para formação das principais estruturas que compõem o nosso Universo, e por sua importância, caso existam, no contexto cosmológico.

Mostramos a evolução da cosmologia com as descobertas e estudos que culminaram na cosmologia que temos hoje. Essa abordagem, de certa forma, foi resumida, pois não detalhamos todos os passos e conceitos propostos por todos que contribuíram para explicar a evolução do universo em um único trabalho.

A importância desse material para estudo bibliográfico para a comunidade acadêmica se dá pelo fato deste oferecer uma releitura para os estudos de Hiscock (1985), oferecendo uma linguagem mais explicativa para o comportamento do espaço-tempo na presença de uma corda cósmica.

# A study of hiscock's solution for cosmic strings

## ABSTRACT

In the seventies emerged the idea of the possibility of the formation of the so-called topological defects. Theories that explain the evolution of the universe, lead us to believe that these defects were created during the phase transition that occurred in the primitive Universe. One of these defects is the cosmic string. It is believed that cosmic strings, if really exist, can help to explain the mechanisms that generate the structures that exists in the Universe. In order to understand the geometry generated by a particular type of defect in the early eighties, Alexander Vilenkin found the metric of space-time from an idealized cosmic string, that is, very thin and with infinite extension. In this study was displayed that the space-time outside the cosmic string is locally flat overall, however, it is not equivalent to Minkowski's spacetime. Later, in order to extend the results obtained by Vilenkin, Hiscock solved Einstein's equations for the particular case that the energy-momentum tensor is constant within the string, and zero at the outer region. In this context, this paper aims to get the solutions of General Relativity for cosmic strings, like those obtained by Hiscock.

**KEYWORDS:** Topological Defects. Spontaneous break symmetry. General Relativity. Hiscock's solution.

## Referências

- DELBEM, N. F. **Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus de Rio Claro – SP, 2010, 144p.
- GANGUI, A. **Cosmology from Topological Defects**. Instituto de Astronomía y Física del Espacio, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina, and Dept. de Física, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria – Pab. 1, 1428 Buenos Aires, Argentina, 2003.
- GOLDSTONE, J. **Field Theories with “Superconductor” Solutions**. IL NUOVO CIMENTO VOL.19, N. 1 1, 1961.
- HISCOCK, William A. **Exact gravitational field of a string**. **Department of Physics**, Montana State University, Bozeman, Montana. V. 31, N. 12, 1985.
- HORVATH, J. E. et al. **Cosmologia física: do micro ao macro**. 1<sup>a</sup> ed. São Paulo: Livraria da Física, p. 250 – 253, 2007.
- ISLAM, J. N. **An introduction to mathematical cosmology**. Cambridge university press, 1992.
- KIBBLE, T. W. B. **Some implications of a cosmological phase transition**. Physics Reports, Vol. 67, No. 1, p. 183 – 199, 1980
- RESNICK. R. **Introdução à Relatividade Especial**. Universidade de São Paulo. Editora Polígono, 1971.
- VILENKIN, A. e SHELLARD, E. P. S. **Cosmic String and Other Topological Defects**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- VILENKIN, A. **Gravitational field of vacuum domain walls and strings**. Physical Review. D 23, 852 - Published 15 February 1981
- WUENSCHÉ, C. A. **Cosmologia**. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE. São José dos Campos, 2003.



## Anexo

### Demonstração da constante $A(\rho)$

Com a utilização do princípio de conservação da energia podemos mostrar que para uma métrica qualquer que for escrita sob a forma dada em (3-13), a função  $A(\rho)$  sempre será uma constante. A derivada covariante do tensor energia momento deve ser nula:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (4-37)$$

A única componente diferente de zero é:

$$-\Gamma_{01}^0 T_0^0 = 0. \quad (4-38)$$

Para que as condições de conservação de energia seja satisfeita, façamos:

$$\Gamma_{01}^0 = 0. \quad (4-39)$$

a componente da conexão  $\Gamma_{01}^0$  foi encontrada em (3-15),

$$\frac{1}{A(\rho)} \frac{dA}{d(\rho)} = 0 \quad (4-40)$$

Assim,  $A(\rho)$  é uma constante.