



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

HUDSON DE ARAÚJO BATISTA

**SOLUÇÕES PARTICULARES DA EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES PARA
ESCOAMENTO DE FLUIDOS NEWTONIANOS**

**CAMPINA GRANDE
2016**

HUDSON DE ARAÚJO BATISTA

**SOLUÇÕES PARTICULARES DA EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES PARA
ESCOAMENTO DE FLUIDOS NEWTONIANOS**

Trabalho de Conclusão de Curso
sobre as Soluções particulares da
equação de Navier-Stokes para
escoamento de fluidos newtonianos
para a obtenção do título de
LICENCIATURA PLENA EM
MATEMÁTICA.

Orientadora: Prof.^a Ma. Núbia do
Nascimento Martins

**CAMPINA GRANDE
2016**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

B333s Batista, Hudson de Araújo.
Soluções particulares da equação de Navier-Stokes para escoamento de fluidos newtonianos [manuscrito] / Hudson de Araújo Batista. - 2016.
31 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Ma. Núbia do Nascimento Martins, Departamento de Matemática".

1. Fenômenos de Transporte. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Equações de Navier-Stokes. 4. Escoamento de fluidos. I. Título. 21. ed. CDD 515.353

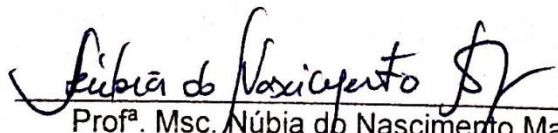
HUDSON DE ARAÚJO BATISTA

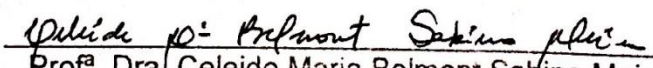
SOLUÇÕES PARTICULARES DA EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES PARA
ESCOAMENTO DE FLUIDOS NEWTONIANOS

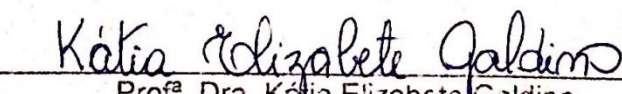
Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de
Licenciatura Plena em Matemática
da Universidade Estadual da
Paraíba, em cumprimento à
exigência para obtenção do grau de
de Licenciatura Plena em
Matemática.

Aprovada em: 01/02/2016.

BANCA EXAMINADORA


Prof^a. Msc. Núbia do Nascimento Martins
Departamento de Matemática – UEPB
Orientadora


Prof^a. Dra. Celeide Maria Belmont Sabino Meira
Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental – UEPB
Examinadora


Prof^a. Dra. Kátia Elizabete Galdino
Departamento de Computação – UEPB
Examinadora

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

A minha orientadora prof^a. Núbia do Nascimento Martins, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelos seus conselhos, correções e incentivos.

Ao amigo e prof. Dr. Rômulo Feitosa Navarro, por todo o apoio na confecção desse trabalho.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

A vocês expesso o meu maior agradecimento.

*“A Ciência, pelo caminho da exatidão, só
tem dois olhos: a Matemática e a lógica”,
Augustus De Morgan.*

RESUMO

A solução da maior parte dos problemas atuais nas diferentes áreas do conhecimento tem requerido um diálogo mais efetivo entre disciplinas e entre profissionais. Isso envolve a mobilização de diferentes especialistas e conhecimentos na tentativa de buscar soluções mais adequadas. Inseridas nesse contexto, estão os problemas relacionados aos Fenômenos de Transporte que possuem um viés com a Matemática. O estudo das equações de Navier-Stokes, que fazem uso das Equações Diferenciais Parciais (EDP), desperta interesse dos estudiosos da área da análise numérica, visto que a partir destas pode-se determinar os campos de velocidade e pressão de um escoamento, sendo possível, assim, fazer previsão de escoamento de fluidos através de tubos ou até do sangue através de uma artéria. Neste trabalho foram estudados dois casos particulares para as equações de Navier-Stokes (equação do movimento) para fluidos Newtonianos. Com a resolução dos problemas, confirmamos a extrema interdependência dos problemas propostos com artifícios matemáticos específicos, evidenciando o uso das EDP no escoamento de um fluido entre placas paralelas e entre discos.

Palavras-Chave: Fenômenos de Transporte, Equações de Navier-Stokes, Equações Diferenciais Parciais

ABSTRACT

The solution of most of the current problems in different areas of knowledge has required a more effective dialogue between disciplines and between professionals. This involves the mobilization of different experts and knowledge in an attempt to seek appropriate solutions. Inserted in this context, the problems are related to Transport Phenomena that have a bias with mathematics. The study of the Navier-Stokes equations, which make use of the Partial Differential Equations (EDP) arouses interest of researchers in the area of numerical analysis, whereas from these may determine the velocity field and pressure a flow, and can thus make prediction of fluid flow through pipes or even blood through an artery. In this research we studied two particular cases for the Navier-Stokes (equation of motion) to Newtonian fluids. With the resolution of the problems, we confirm the extreme interdependence of the proposed problems with specific mathematical artifices, showing the use of EDP in the flow of a fluid between parallel plates and between discs.

Keywords: Transport Phenomena, Navier-Stokes Equation, Partial Differential Equations

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Força tangencial agindo sobre um fluido. Fonte: (GOMES, 2002)...	14
Figura 2 - Comportamento de um fluido entre duas placas. Fonte: Adaptada de (LIVI, 2004).....	15
Figura 3 - Tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação. Fonte: (ALÉ, 2011)	16
Figura 4 - Esquema da orientação do fluxo em um balão.	18
Figura 5 - Fluido escoando através de um tubo em regime (a) laminar e (b) turbulento. Fonte: (CORTEZ, 2011)	19
Figura 6 - Elemento de volume fixo indicando o fluxo de momento de direção x através das superfícies por todos os mecanismos. Fonte: (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004).....	22
Figura 7 - Escoamento entre placas paralelas	25
Figura 8 - Escoamento radial para fora, no espaço entre dois discos circulares e paralelos.....	26

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Eq.	Equação
D	Diâmetro
N_R	Número de Reynolds
V	Velocidade
F	Força
a	Aceleração
V_m	Velocidade média
EDP	Equações Diferenciais Parciais

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Densidade
μ	Coeficiente de viscosidade
τ	Tensão de cisalhamento
∇	Nabla
g	Força gravitacional
∂	Delta
ϕ	Taxa
∞	Infinito
Δ	Delta

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 ESTADO DA ARTE	14
2.1 Fenômenos de Transporte.....	14
2.2 Fluidos e viscosidade.....	14
2.3 Fluxo	17
2.4 Regimes de escoamento	18
2.5 Gradiente e Divergente.....	19
2.6 Equações Diferenciais Parciais	20
2.7 Equação do Movimento	22
3 PROBLEMAS PROPOSTOS	25
3.1 Escoamento entre placas paralelas	25
3.2 Escoamento radial entre discos	26
4 CONCLUSÕES	29
REFERÊNCIAS.....	30
Apêndice A – Equação do movimento para um fluido newtoniano com ρ e μ constantes.....	31

1 INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial ordinária possui derivadas de apenas uma variável enquanto que uma equação diferencial parcial possui derivadas parciais da função incógnita. Muitas leis físicas como: Leis de Newton para o resfriamento dos corpos, Equações de Maxwell, Equações da Mecânica Quântica de Schrödinger e Equações de Navier-Stokes são escritas por Equações Diferenciais Parciais que relacionam o espaço e suas derivadas com o tempo (MEDEIROS; MIRANDA, 2003).

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento de fluidos. A partir destas pode-se determinar os campos de velocidade e de pressão em um escoamento. Logo, são muito úteis, pois descrevem a física de um grande número de fenômenos de interesses econômicos e acadêmicos (BATCHELOR, 2000).

Estas equações são utilizadas para modelar o clima, correntes oceânicas, fluxo ao redor de aerofólios de automóveis e de aviões, propagação de fumaça em incêndios e em chaminés industriais. Também são usadas diretamente nos projetos de aeronaves e carros, nos estudos do fluxo sanguíneo, no projeto de usinas hidrelétricas, na análise dos efeitos da poluição hídrica em rios, mares, lagos, oceanos e da dispersão da poluição atmosférica, etc (MEDEIROS; MIRANDA, 2003).

Na prática, somente os casos mais simples das equações de Navier-Stokes podem ser resolvidos analiticamente. Estas são equações diferenciais parciais não-lineares em praticamente todas as situações reais, o que dificulta a obtenção da solução. Ainda, as condições de contorno iniciais fazem com que a maioria dos problemas sejam difíceis ou impossíveis de serem resolvidos. Para tais situações reais, como a sustentação de uma asa de avião, a solução dessas equações é aproximada com a utilização de computadores.

Dentre os diversos tópicos possíveis que podemos encontrar o uso aplicado da matemática, apresentamos neste trabalho a interdisciplinaridade com os Fenômenos de Transporte. Esse assunto inclui três tópicos intimamente relacionados: dinâmica dos fluidos, transferência de calor e transferência de massa (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004).

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é oferecer soluções particulares para o escoamento de fluidos newtonianos (dinâmica dos fluidos) mediante o uso das Equações Diferenciais Parciais, onde serão abordados dois casos, escoamento entre placas e escoamento entre discos, envolvendo as equações de movimento das substâncias fluidas, também conhecidas como Equações de Navier-Stokes.

2 ESTADO DA ARTE

É importante ter alguma idéia sobre a estrutura do que envolve o tema Fenômenos de Transporte. Sem essa perspectiva, não é possível apreciar os princípios de unificação do assunto e a inter-relação dos vários tópicos com a matemática. Nesse sentido, nos itens subseqüentes, serão tratados os tópicos que contextualizam a situação problema descrita anteriormente.

2.1 Fenômenos de Transporte

O assunto fenômenos de transporte inclui três tópicos relacionados: dinâmica dos fluidos, transferência de calor e transferência de massa. A dinâmica dos fluidos envolve o transporte de *momento*, a transferência de calor lida com o transporte de *energia* e a transferência de massa diz respeito ao transporte de *massa* de várias espécies químicas. Para todos os tópicos apresentados, as ferramentas matemáticas usadas para descrever esses fenômenos são muito similares. Assim, é extremamente importante o entendimento e conhecimentos dessas ferramentas para os desdobramentos e desenvolvimentos dos fenômenos de transporte (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004).

2.2 Fluidos e viscosidade

Pode-se definir fluido como uma substância que se deforma continuamente, isto é, escoar sob ação de uma força tangencial por menor que ele seja (GOMES, 2002).

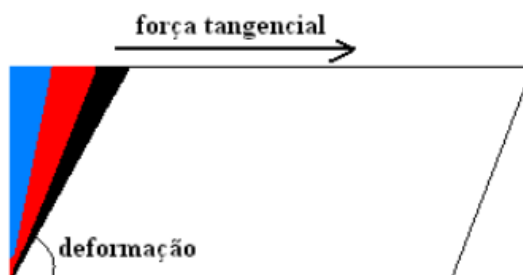
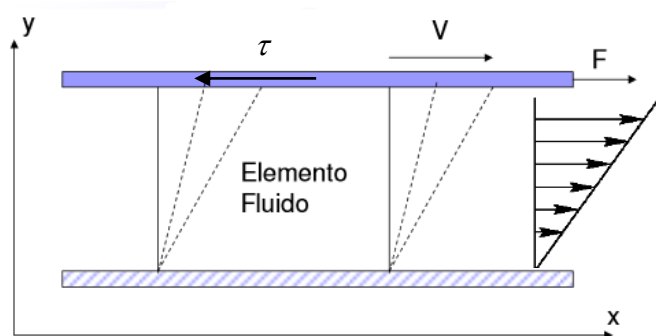


Figura 1 - Força tangencial agindo sobre um fluido. Fonte: (GOMES, 2002).

O conceito de fluidos envolve líquidos e gases, logo, é necessário distinguir estas duas classes: líquido é aquela substância que adquire a forma do recipiente que a contém possuindo volume definido e, é praticamente, incompressível. Já o gás é uma substância que ao preencher o recipiente não formar superfície livre e não tem volume definido, além de serem compressíveis (GOMES, 2002).

Para fluidos de baixo peso molecular, a propriedade que caracteriza a resistência ao escoamento é a viscosidade. Ou seja, quanto maior a viscosidade, maior é a resistência ao movimento e menor é sua capacidade de escoar (fluir). A Figura 2 esboça, de maneira geral, o comportamento de um fluido entre duas placas. Para um fluido, as tensões de cisalhamento aparecem devido ao escoamento viscoso e a viscosidade é a consequência do atrito interno.



Onde:

F: Força aplicada na placa superior

A: Área da placa

μ: Viscosidade

τ: Tensão de cisalhamento

V: Velocidade

Figura 2 - Comportamento de um fluido entre duas placas. Fonte: Adaptada de (LIVI, 2004)

O fluido junto à placa superior irá se deslocar com velocidade V , enquanto aquele junto à placa inferior estará com velocidade nula. Em cada seção normal às placas, irá se formar um diagrama de velocidades, onde cada camada do fluido desliza sobre a adjacente com certa velocidade relativa. Nesse sentido, define-se a Lei de Newton da Viscosidade pela Equação 1.

$$\tau = -\mu \cdot \frac{dV_x}{dy} \quad \text{Eq. (1)}$$

Esta equação afirma que a força cisalhante por unidade de área é proporcional ao negativo do gradiente de velocidade (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004). É válido salientar que um fluido estacionário ou com

movimento uniforme, a tensão em um ponto é independente da direção, e dessa forma ela pode ser representada por uma única quantidade escalar (como pelo perfil de velocidade, na Figura 2, por exemplo). Nesse caso a tensão também é chamada de *pressão*. Dessa forma a pressão é tomada como uma medida de força por unidade de área, resultado da manifestação média da colisão de um fluido com as paredes do recipiente que o contém. Outra propriedade importante é a temperatura, que é uma variável que impacta diretamente sobre a viscosidade.

A resistência ao escoamento de todos os gases e líquidos com peso molecular menor que 5000 é válida para a Eq. 1 e tais fluidos são classificados como fluidos newtonianos, por ex: água, líquidos finos assemelhados e os gases de maneira geral (além disso, se a densidade do fluido = cte ou desprezíveis, denomina-se fluido newtoniano incompressível). Líquidos poliméricos, suspensões, lamas, pastas e outros fluidos complexos, a Eq. 1 não é válida e são classificados como fluidos não newtonianos. Há várias categorias deste último, sendo apresentados brevemente abaixo. Essas categorias são baseadas nas relações entre a tensão e o gradiente de velocidade (variação da tensão de cisalhamento) no fluido. Tais relações podem ser vistas no gráfico da Figura 3 para várias categorias de fluidos.

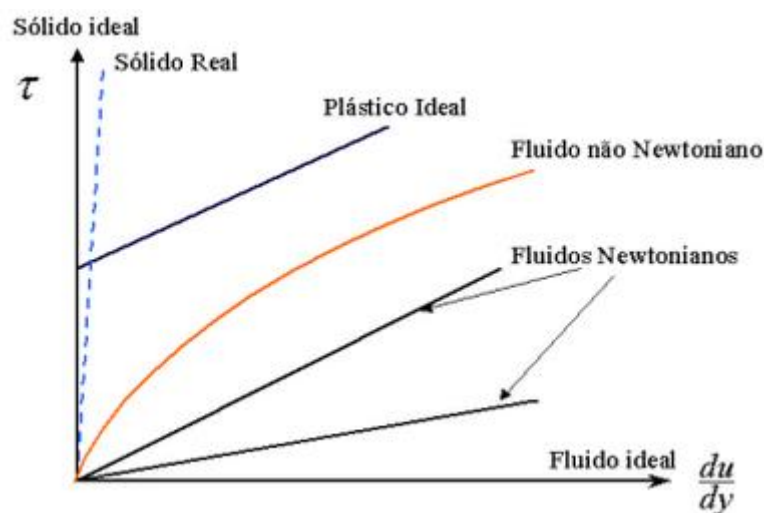


Figura 3 - Tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação. Fonte: (ALÉ, 2011)

Uma vez que as Equações de Movimento levam em conta a análise sobre um pequeno elemento de volume, faz-se necessário introduzir a idéia da

segunda Lei de Newton, Equação 2, que são escritas para uma partícula de fluido.

$$\vec{F}_{partícula} = m_{partícula} \cdot \vec{a}_{partícula} \quad \text{Eq. (2)}$$

onde: $F_{partícula}$ é a força resultante que age sobre a partícula de fluido, enquanto $m_{partícula}$ e $a_{partícula}$ correspondem a massa e a aceleração, respectivamente. Por definição, a aceleração da partícula de fluido é a derivativa no tempo da velocidade da partícula (ÇENGEL; CIMBALA, 2015), como na Equação 3 a seguir:

$$\vec{a}_{partícula} = \frac{d\vec{v}_{partícula}}{dt} \quad \text{Eq. (3)}$$

2.3 Fluxo

Imagine um pequeno quadrado inserido dentro de um fluido. Obviamente o fluxo através deste quadrado depende da orientação do quadrado. Se ele for colocado com a sua normal paralelo a velocidade o fluxo, i.e., a quantidade de fluido por unidade de tempo que atravessa este quadrado vale

$$\phi = \frac{1}{dt} (v \cdot dt \cdot a) = v \cdot a \quad \text{Eq. (4)}$$

enquanto se ele for colocado perpendicular a velocidade do fluido não haverá fluxo. Este resultado pode ser resumido como

$$\phi = F \cdot a \cdot \cos \theta = F \cdot a \quad \text{Eq. (5)}$$

Observe que o fluxo através de uma área é um escalar. Imagine agora que você deseja calcular o fluxo através de uma superfície fechada (um balão). Para fazer isso podemos primeiro dividir esta superfície em vários quadradinhos e usar o conceito acima para calcular o fluxo através de cada um destes quadrados. Como queremos saber se há fluido entrando ou saindo do balão, damos um valor positivo para a normal de cada área que aponta para

fora do balão e negativo para a que aponta pra dentro, conforme pode ser visto na Figura 4. Chamamos isso de orientar as áreas.

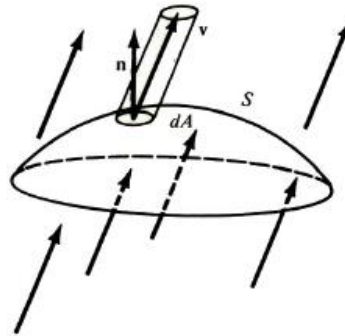


Figura 4 - Esquema da orientação do fluxo em um balão.

O fluxo total pelo balão será

$$\phi = \sum_i F \cdot a_i \quad \text{Eq. (6)}$$

No limite de $a_i \rightarrow 0$, temos

$$\phi = \int F \cdot da \quad \text{Eq. (7)}$$

esta é uma integral de superfície de um campo vetorial F . Ou seja, a integral de superfície de F sobre uma superfície S significa apenas dividir S em pequenas partes, cada uma representada por um vetor orientado para fora de S e tomar o produto escalar desta área com o valor de F no local (BATCHELOR, 2000).

2.4 Regimes de escoamento

O regime de escoamento, se lamelar ou turbulento, é determinado pela seguinte quantidade adimensional, Equação 8, chamada de número de Reynolds (RUI; FERNANDES, 2012).

$$N_R = D \frac{\rho}{\mu} V_m \quad \text{Eq. (8)}$$

em que: D é o diâmetro do tubo, ρ é a densidade, μ é o coeficiente de viscosidade e V_m é o módulo da velocidade média de escoamento do fluido. A velocidade média de escoamento é definida como sendo a velocidade constante, igual para todos os elementos de volume do fluido, que produz a mesma vazão. É um dado experimental que o escoamento de um fluido pode

ser lamelar ou turbulento, vide Figura 4, conforme o valor do número de Reynolds: $N_R < 2\,000$ laminar e $N_R > 3\,000$ turbulento (RUI; FERNANDES, 2012).

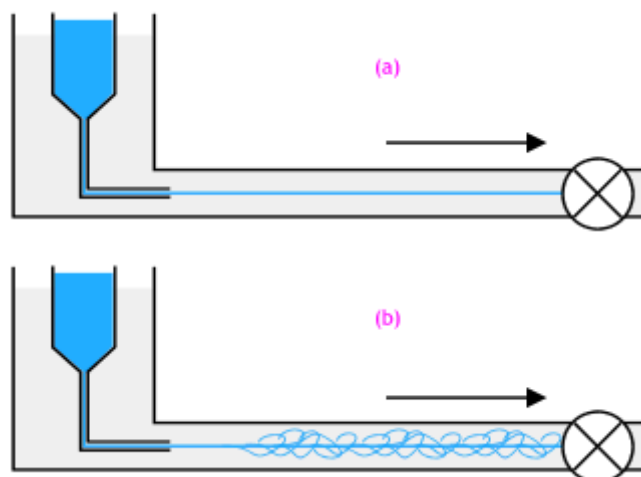


Figura 5 - Fluido escoando através de um tubo em regime (a) laminar e (b) turbulento. Fonte: (CORTEZ, 2011)

A importância fundamental do número de Reynolds é a possibilidade de se avaliar a estabilidade do fluxo podendo obter uma indicação se o escoamento flui de forma laminar ou turbulenta. O número de Reynolds constitui a base do comportamento de sistemas reais, pelo uso de modelos reduzidos (LIVI, 2004).

2.5 Gradiente e Divergente

Para várias propriedades ou grandezas físicas é possível verificar uma distribuição espacial onde sua intensidade varia. A matemática dispõe de uma ferramenta conveniente para descrever quantitativamente as variações espaciais das grandezas e propriedades. Essa ferramenta, o gradiente, é usada com profundidade no cálculo, na álgebra e nas diversas áreas da física. Entretanto, é possível apresentá-la de forma simplificada e indicar suas propriedades gerais, posto que ela é muito útil para explicar fenômenos básicos, interessantes e relativamente simples acerca das grandezas físicas (VALLE, 2008).

Formalmente, existem funções de múltiplas variáveis, onde cada qual destas variáveis pode representar um versor (vetor de comprimento igual a 1) que constitui a base de um espaço vetorial necessária para representar esse espaço. Assim, uma função qualquer $f(x,y,z)$ poderia ser a descrição da distribuição espacial de alguma propriedade ou grandeza. Sobre uma função desse tipo, existe um operador linear que, quando aplicado à função, produz um vetor que sempre aponta para o ponto máximo da função, descrito pela derivada espacial da função em relação a cada versor de uma base do espaço vetorial que englobe a tal função. Isso significa simplesmente que o gradiente é uma medida da taxa de variação de uma grandeza com o espaço e produz um vetor que sempre aponta para o ponto onde a propriedade ou grandeza é mais intensa (VALLE, 2008). Algebricamente, tem-se que:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \approx \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}, \frac{\Delta f}{\Delta y}, \frac{\Delta f}{\Delta z} \right) \quad \text{Eq. (9)}$$

Considere, agora, a mesma função no espaço tomada anteriormente, sendo vetorialmente contínua e com derivadas contínuas pelo menos até a primeira ordem. Por definição, divergente é um escalar calculado pelo produto escalar $\vec{\nabla}$ e a função vetorial considerada.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{Eq. (10)}$$

O divergente está relacionado, assim, com quanto de fluido entra (ou sai) de um volume, seja pela criação (ou absorção) deste fluido, seja pela sua compressão (BATCHELOR, 2000).

2.6 Equações Diferenciais Parciais

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve uma função desconhecida $u(x_1, \dots, x_n)$ e suas derivadas parciais de até uma certa ordem. A ordem de uma equação diferencial parcial é a ordem da derivada mais alta que aparece na mesma. Por exemplo, uma equação diferencial de primeira ordem nas variáveis x, y é da forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

enquanto uma equação diferencial parcial de segunda ordem nas variáveis x, y é da forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}) = 0.$$

Chama-se solução de uma equação diferencial parcial a uma função que verifica identicamente essa equação. As soluções se classificam em:

- I. **Solução geral** - apresenta n constantes independentes entre si (n = ordem da Equação Diferencial Ordinária);
- II. **Solução Particular** - obtida da geral, mediante condições dadas (chamadas condições iniciais ou condições de contorno) (HAUSER, 2011).

Para a busca da solução, podem ser empregados diversos métodos. No Princípio da Superposição, Se u_1, u_2, \dots, u_n são soluções de uma EDP linear e homogênea, então a combinação linear $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ também é solução dessa equação, onde c_1, c_2, \dots, c_n são constantes. Admitiremos que sempre que tivermos um conjunto infinito u_1, u_2, \dots de soluções de uma equação diferencial parcial linear e homogênea, poderemos obter uma outra solução construindo a série infinita.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{Eq. (11)}$$

Já a técnica da Separação de Variáveis reduz uma equação diferencial parcial a várias equações diferenciais ordinárias. Para resolver uma equação diferencial parcial por separação de variáveis, supomos que uma solução pode ser expressa como o produto de duas funções desconhecidas, em que uma delas é função de apenas uma das variáveis independentes e a outra das restantes. A equação resultante escreve-se de modo a que um dos membros dependa apenas de uma das variáveis e o outro das variáveis restantes. Sendo assim cada um dos membros terá de ser uma constante, o que vai permitir determinar as soluções (HAUSER, 2011).

2.7 Equação do Movimento

Para sistemas isotérmicos, a Equação do Movimento se fundamenta na 2ª Lei de Newton do movimento (Eq. 2), na qual se faz um balanço de forças (taxa de quantidade de movimento) em um elemento de volume, de volume $dxdydz$. O balanço de forças atuando no volume de controle, Figura 5, é escrito da maneira como segue na Equação 12:

$$[\text{Taxa de aumento de momento}] = [\text{Taxa de entrada de momento}] - [\text{Taxa de saída de momento}] + [\text{Taxa externa sobre o fluido}] \quad \text{Eq. (12)}$$

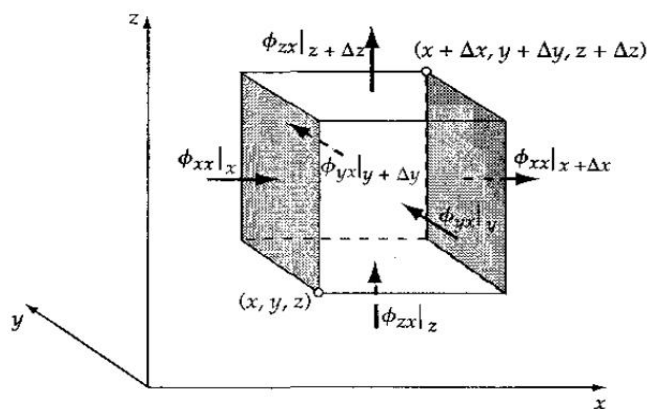


Figura 6 - Elemento de volume fixo indicando o fluxo de momento de direção x através das superfícies por todos os mecanismos. Fonte: (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004)

A Eq. 5 é uma equação vetorial com componentes em cada uma das três coordenadas x , y e z . A seguir, deduziremos a componente x de cada termo da Eq. 5, pois os termos y e z são tratados de analogamente.

Primeiro, consideramos as taxas de momento de direção x para dentro e para fora do elemento de volume evidenciado na Figura 5. O momento entra e sai de Δx , Δy e Δz por dois mecanismos: transporte convectivo e transporte molecular. A taxa com que a componente do momento de direção x entra através da face sombreada em x por todos os mecanismos – é $(\phi_{xx})|_x \Delta y \Delta z$ e a taxa com que ela sai pela face sombreada em $x+\Delta x$ é $(\phi_{xx})|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. As taxas com que momento de direção x entra e sai nas faces y e Δy são, respectivamente, $(\phi_{yx})|_y \Delta z \Delta x$ e $x+\Delta x$ é $(\phi_{yx})|_{y+\Delta y} \Delta z \Delta x$. De forma análoga, faz-se

para a coordenada z . Quando essas contribuições são somadas, obtemos a taxa líquida de adição de momento de direção x , conforme a Equação 13:

$$\Delta y \Delta z (\phi_{xx}|_x - \phi_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta z \Delta x (\phi_{yx}|_y - \phi_{yx}|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\phi_{zx}|_z - \phi_{zx}|_{z+\Delta z}) \quad \text{Eq. (13)}$$

através de todos os três pares de faces. A seguir vem a força externa (tipicamente a força gravitacional) agindo sobre o fluido no elemento de volume. A componente x desta força esta descrita na Equação 14:

$$\rho g \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{Eq. (14)}$$

As Equações 13 e 14 correspondem às componentes na direção x dos três termos no lado direito da Equação 12. A soma desses termos deve então ser igualada à taxa de aumento de momento de direção x no interior do elemento de volume: $\Delta x \Delta y \Delta z \partial(\rho v_x)/\partial t$. Quando isso é feito, temos o balanço da componente de momento de direção x . Quando essa equação é dividida por $\Delta x \Delta y \Delta z$ e toma-se o limite quando $\Delta x \Delta y \Delta z$ tendem a zero, resulta na Equação 15:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \phi_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \phi_{zx} \right) + \rho g_x \quad \text{Eq. (15)}$$

Neste ponto, fizemos uso das definições de derivadas parciais. As equações para as componentes y e z do balanço de momento podem ser desenvolvidas de forma análoga. Na Equação 16, utilizando a notação vetorial-tensorial, escrevemos a equação para as três componentes, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - [\nabla \cdot \phi]_i + \rho g_i \quad i = x, y, z \quad \text{Eq. (16)}$$

Fazendo i igual a x , é possível reproduzir a Equação 8 e, assim sucessivamente, para as componentes y e z . As grandezas ρv_i são as componentes Cartesianas do vetor $\rho \mathbf{v}$, que é o momento por unidade de volume em um ponto no fluido. Similarmente as grandezas ρg_i são as

componentes do vetor ρg que é a força externa por unidade de volume. O termo $-\left[\nabla \cdot \phi\right]_i$ é o i -ésimo componente do vetor $-\left[\nabla \cdot \phi\right]$.

Quando o i -ésimo componente da Eq. 16 é multiplicado pelo vetor unitário da direção i e os três componentes são somados vetorialmente, podemos escrever como segue na Equação 17:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = -\left[\nabla \cdot \phi\right] + \rho g \quad \text{Eq. (17)}$$

que é a forma diferencial da Lei de conservação de momento. Ela é a versão da Equação 12 usando símbolos matemáticos. Para além disso, o tensor fluxo combinado de momento, ϕ , é a soma do tensor fluxo convectivo de momento, $\rho v v$, e do tensor fluxo molecular de momento, τ , sendo que esse último pode ser escrito como a soma de $p\delta$ e τ . Quando inserimos $\phi = \rho v v + p\delta + \tau$ na Equação 17, obtemos a Equação 18, chamada de Equação do Movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = -\left[\nabla \cdot \rho v v\right] - \nabla p - \left[\nabla \cdot \tau\right] + \rho g \quad \text{Eq. (18)}$$

Nesta equação, ∇p é um vetor chamado de “gradiente de p (p é escalar)”, algumas vezes escrito como “grad p ”. O símbolo $\nabla \cdot \tau$ é um vetor chamado “divergência de τ (que é um tensor)” e $\left[\nabla \cdot \rho v v\right]$ é um vetor chamado “divergente de $\rho v v$ (que é um produto diádico, ou seja, produto de dois vetores)” (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004).

3 PROBLEMAS PROPOSTOS

3.1 Escoamento entre placas paralelas

Considerando que o escoamento do fluido se deve ao movimento da placa superior para um fluido newtoniano e incompressível, conforme pode ser visto na Figura 7, temos:

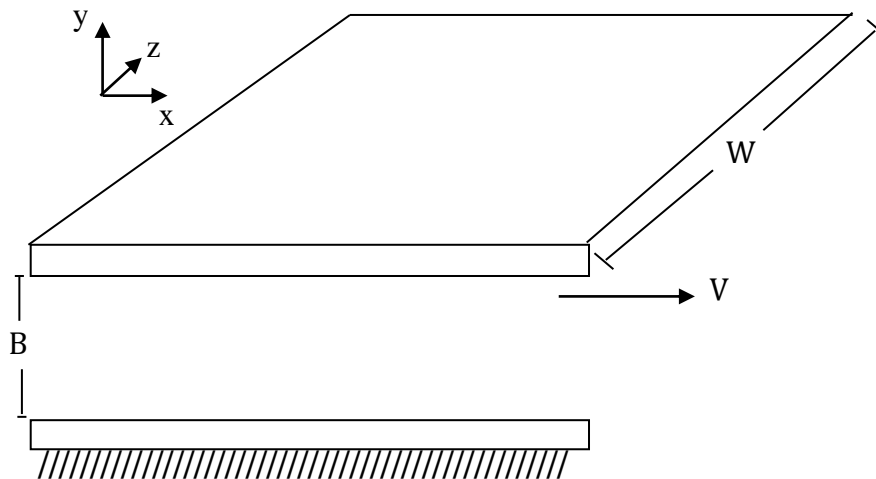


Figura 7 - Escoamento entre placas paralelas

Considerações:

- 1) $W \gg B$
- 2) $\Delta p = 0$ (fluido incompressível); $\rho = \text{cte}$
- 3) $V_y = V_z = 0$
- 4) $V_x = V_x(y)$
- 5) $\frac{\partial V_i}{\partial t} = 0$ (regime estacionário)
- 6) Condições de contorno:
 - Em $y = 0$, $V_x = 0$
 - Em $y = B$, $V_x = V$

A equação do movimento para um fluido Newtoniano com ρ e μ constantes, levando em conta as considerações supracitadas, para coordenadas cartesianas (x, y, z) é:

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$\frac{\partial V_i}{\partial t} = 0$ $V_x(y) \neq V_x$ $V_y = 0$ $V_z = 0$ $\Delta p = 0$ $V_x(x) = V_x$ $V_x(z) = V_x$ Fluxo horizontal

Após as simplificações, temos:

$$\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial V_x}{\partial y} = \int \frac{C_1}{\mu} \Rightarrow V_x(y) = c_1 y + c_2$$

Através das condições de contorno é possível determinar os valores das constantes c_1 e c_2 .

$$\text{Em } y = 0, V_x = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Em } y = B, V_x = V \Rightarrow V = c_1 B \Rightarrow c_1 = \frac{V}{B}$$

Portanto, a solução particular para o problema proposto é:

$$V_x(y) = y \frac{V}{B}$$

3.2 Escoamento radial entre discos

Uma parte de um sistema de lubrificação consiste em dois discos circulares entre os quais escoam radialmente um lubrificante, conforme visto na Figura 8. O escoamento é devido à força da gravidade, onde o movimento é radial e o fluido entra pelo eixo z .

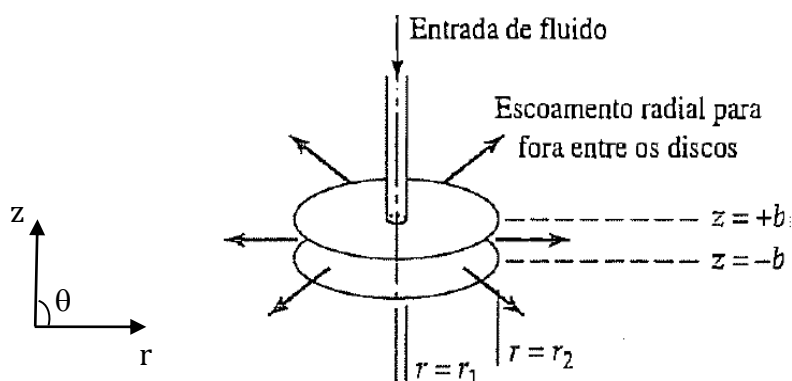


Figura 8 - Escoamento radial para fora, no espaço entre dois discos circulares e paralelos

Considerações:

- 1) $r_2 \gg b \Rightarrow V_z \cong 0$
- 2) $\Delta p = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0$
- 3) $\frac{\partial V_r}{\partial t} = 0$ (regime estacionário)
- 4) $V_\theta = 0$ (não está girando)
- 5) Só há movimento em $r \Rightarrow V_r \neq 0$
- 6) A velocidade varia com $z \Rightarrow V_r = V_r(z)$
- 7) Condições de contorno:

$$\text{Em } z = 0, V_r = 0$$

$$\text{Em } z = b, V_r = 0$$

A equação do movimento para um fluido Newtoniano com ρ e μ constantes, levando em conta as considerações supracitadas, para coordenadas cilíndricas (r, θ, z) é:

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r = 0$$

Após as simplificações, temos:

$$\mu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \rho g_r = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} = - \int \frac{\rho g}{\mu} \Rightarrow \int \frac{\partial V_r}{\partial z} = - \int \frac{\rho g z}{\mu} + c_1 \Rightarrow V_r(z) = \frac{-\rho g z^2}{2\mu} + c_1 z + c_2$$

Através das condições de contorno é possível determinar os valores das constantes c_1 e c_2 .

$$\text{Em } z = 0, V_r = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Em } z = b, V_r = 0 \Rightarrow \frac{-\rho g b^2}{2\mu} + c_1 b = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{\rho g b}{2\mu}$$

Portanto, a solução particular para o problema proposto é:

$$V_r(z) = \frac{-\rho g z^2}{2\mu} + \frac{\rho g b z}{2\mu} \Leftrightarrow V_r(z) = \frac{\rho g z}{2\mu} (b-z)$$

4 CONCLUSÕES

A partir da resolução dos problemas propostos, ficou evidenciado o modo como a Matemática é aplicada em uma área da engenharia contemporânea. Foram utilizados diversos conceitos matemáticos como: sistemas de coordenadas (cartesianas e polares) e equações diferenciais parciais. O indispensável e sólido conhecimento desses artifícios matemáticos é parte fundamental para a resolução dos problemas descritos. Embora os casos propostos apresentem geometrias diferentes, o princípio aplicado foi mesmo e com o uso dos artifícios já comentados, foi possível determinar as respectivas equações do movimento do fluido, que é escrita em função da velocidade.

REFERÊNCIAS

- ALÉ, J. A. V. **Mecânica dos Fluidos: Curso Básico**, 2011.
- BATCHELOR, G. **An Introduction to Fluid Dynamics**. [s.l.] Cambridge University Press, 2000.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Fenômenos de Transporte**. Second ed. [s.l.] Livros Técnicos e Científicos, 2004.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos**. 3. ed. ed. [s.l.] AMGH, 2015.
- CORTEZ, G. G. **Notas de Fenômenos de Transporte I**, 2011.
- GOMES, M. H. R. **Apostila de Mecânica dos Fluidos**. Juiz de Fora, 2002.
- HAUSER, E. B. **Exemplos de Equações Diferenciais Parciais**, 2011.
- LIVI, C. P. **Fundamentos de Fenômenos de Transporte: um texto para cursos básicos**. Livros Técnicos e Científicos, 2004.
- MEDEIROS, L.; MIRANDA, M. Equações Diferenciais Parciais. **IM-UFRJ, Rio de Janeiro**, p. 1–22, 2003.
- RUI, P.; FERNANDES, A. **Mecânica e Modelação Computacional Noção de Fluido**. 2012.
- VALLE, M. E. **Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente**. Campinas, 2008.

Apêndice A – Equação do movimento para um fluido newtoniano com ρ e μ constantes

A Equação do movimento (Navier-Stokes) deduzida no corpo do trabalho é uma Equação Geral considerando a influencia de todas as variáveis. Os problemas apresentados são casos particulares e foram resolvidos mediante a utilização das equações B.6-1 e B.6-4, retiradas de (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004).

B.6 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA UM FLUIDO NEWTONIANO COM ρ E μ CONSTANTES

$$[\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}]$$

Coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x \quad (\text{B.6-1})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y \quad (\text{B.6-2})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (\text{B.6-3})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \quad (\text{B.6-4})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta \quad (\text{B.6-5})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (\text{B.6-6})$$