UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ VALBER SILVINO DA SILVA

APLICAÇÕES DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

CAMPINA GRANDE – PB
2014

JOSÉ VALBER SILVINO DA SILVA

APLICAÇÕES DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado.

Orientadora: Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE – PB
2014

S586a Silva, José Valber Silvino da.
Aplicações de matrizes no Ensino Médio [manuscrito] / Jose Valber Silvino da Silva. - 2014.
48 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática".

1. Matrizes. 2. Ensino de matemática. 3. Ensino Médio. 4. Contextualização. I. Título.

21. ed. CDD 512.5

JOSÉ VALBER SILVINO DA SILVA

APLICAÇÕES DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado.

Aprovada em 24/07/2014.

Kátia Suzana medeiros Graciano
Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano / UEPB
Orientadora

Fernando Luiz Tavares da Silva
Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva / UEPB
Examinador

Joselma S. Santos
Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos / UEPB
Examinadora

DEDICATÓRIA

À minha avó Dalvanira (*in memoriam*), que me criou com muito amor e carinho, e me preparou para a vida. À ela sempre irei dedicar todas as minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre esteve ao meu lado, me dando sabedoria, ânimo, proteção e força para enfrentar todas as batalhas com as quais me deparei ao longo desta caminhada, por ter permitido a realização do meu sonho de ser professor de matemática e principalmente pelo dom da vida.

Aos meus avós, Manoel e Dalvanira (*in memoriam*), que me criaram, me educaram e me incentivaram a estudar para alcançar os meus objetivos.

Aos meus pais, Rosilda e Genário, que mesmo distantes, sempre torceram pela minha realização pessoal.

Aos meus tios: Rinaldo, José, Rosana, Roberval, Roseane, Rosivan, Reginaldo, Rosenilda, Rosivaldo e Ronaldo, pelo apoio e incentivo.

Aos meus professores de matemática do ensino básico, Jalon e Jurandir, que despertaram em mim o gosto pela matemática e me motivaram a fazer esse curso.

Aos meus colegas: Luciene, Rodrigo, Josênelle, Claudenor, Juscelino, Michelly, Ataiz, Jane, Fabiana, Fabrício e Daniela, pela a amizade construída, o apoio me dado e os bons momentos vividos durante esses quatro anos e meio de curso.

Ao motorista Carlinhos, pela responsabilidade, paciência e compreensão.

Aos amigos e colegas da minha cidade, com os quais viajei durante esse período pra Campina Grande, pelo companheirismo e união, principalmente nos momentos em que tivemos dificuldades pra conseguir transporte.

À minha orientadora, professora Kátia Suzana, pela competência, disponibilidade e valiosa contribuição para a realização desse trabalho.

Aos professores da banca examinadora, Fernando Luiz e Joselma, pela disponibilidade e indispensáveis sugestões dadas para o aprimoramento desse trabalho.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta, para a minha formação profissional.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Nicolai Lobachevsky

R E S U M O

O estudo de matrizes no ensino médio geralmente é enfocado na técnica de operações e pouco se recorre à situação-problema e contextualização. Essa abordagem não permite ao aluno perceber a aplicabilidade deste conteúdo, o que pode ser um fator desfavorável em sua aprendizagem. Além disso, há escassez de materiais didáticos que deem subsídio ao professor nesse sentido. O presente trabalho tem como objetivo mostrar algumas aplicações de matrizes que se dão no controle de tráfego, endocrinologia, modelos populacionais, criptografia e computação gráfica. Será apresentada ainda uma síntese da história das matrizes e uma visão geral de sua teoria, através da definição de matriz, representação, tipos, operações e propriedades. Espera-se dessa forma auxiliar o professor a despertar maior interesse em seus alunos pelo conteúdo e uma melhor aprendizagem, assim como promover discussões e reflexões sobre o estudo de matrizes no ensino médio.

PALAVRAS-CHAVE: Matrizes. Operações. Aplicações. Ensino médio.

A B S T R A C T

The study about Matrices in High School is usually focused on the approach of operations and it is hardly ever regarded as a problem situation and contextualization. This approach does not allow the student to notice this content applicability, which may be a negative factor in their learning. Thus, there is a shortage of teaching materials that support teacher on this way. This paper's objective is to show some Matrices applications that occur within traffic control system, endocrinology, population models, encryption and computer Graphics. It is also presented a Matrices History summary and an overview of its theory through Matrix definition, representation, types, operations and properties. It is expected to aid teachers to awaken students' greater interest to the content and to reach better learning results, as well as to promote discussions and reflection on the Matrices study at High School.

KEYWORDS: Matrices. Operations. Applications. High School.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A abordagem de matrizes no ensino médio quase sempre se dá de forma mecânica e dissociada da realidade, o que impede que o aluno perceba a aplicabilidade desse conteúdo e tenha maior interesse em aprendê-lo. Muitas vezes, o professor de matemática não dispõe de ferramentas para trabalhar o conteúdo de matrizes de forma inovadora, visto que os livros didáticos, em sua maioria, não trazem atividades com foco nas aplicações.

Este trabalho tem como objetivo apresentar algumas das muitas aplicações das matrizes no dia-a-dia, a fim de auxiliar o professor de matemática a despertar o interesse do aluno pelo conteúdo, para que este compreenda a finalidade do estudo das matrizes e suas respectivas operações, e consequentemente obtenha uma melhor aprendizagem.

Como base de estudo e pesquisa, as principais referências foram: Boldrini (1980), Boyer (1996), Dante (2004), Iezzi (2004) e Kuerten (2002).

Este trabalho inicia-se com o capítulo que expõe uma síntese da história das matrizes, onde é apresentado um dos mais antigos registros referentes à ideia de matriz, o surgimento do termo "matriz", a origem da teoria e também a biografia do matemático inglês Arthur Cayley, a quem é conferido o mérito da invenção das matrizes.

No capítulo seguinte, é abordada a definição de matrizes, as formas de representá-las algebricamente, seus principais tipos, as operações básicas exemplificadas e também suas propriedades com as respectivas demonstrações.

A ideia central deste trabalho é exibida em seu último capítulo, através de sugestões de aplicações para a abordagem de matrizes no ensino médio. Tais aplicações se dão em situações do cotidiano, como: controle de tráfego, endocrinologia, modelos populacionais, criptografia e computação gráfica.

A aplicação no controle de tráfego acontece por meio de operações com matrizes para indicar o tempo em que cada semáforo deve permanecer aberto e fechado, controlando assim o fluxo de veículos.

Na Endocrinologia, as matrizes auxiliam na prescrição de dietas e programas de exercícios, além disso, são um instrumento importante para a análise do crescimento populacional.

A criptografia é um método usado para codificar e decodificar mensagens, que pode ser efetuado por meio de matrizes.

É através de operações com matrizes, que um programa gráfico altera a posição dos pixels que compõem uma imagem, fazendo-a girar, mudar de posição ou de escala, o que na computação gráfica recebe o nome de transformação geométrica.

Estas são algumas das inúmeras aplicações das matrizes no dia-a-dia, que geralmente passam despercebidas, devido ao ensino descontextualizado deste conteúdo.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS MATRIZES

2.1 O livro "Nove capítulos sobre a arte matemática" e a ideia de matriz

Um dos mais antigos registros referentes à ideia de matriz encontra-se no livro chinês Chui-Chang Suan-Shu (Nove Capítulos sobre a Arte Matemática). Escrito por volta de 250 a.C., o livro contém problemas sobre diversos assuntos, como: mensuração de terras, agricultura, engenharia, impostos, etc. São ao todo 246 problemas, dentre os quais, um é resolvido através de cálculos efetuados em uma tabela (matriz). Veja o problema:

Existem três tipos de milho, dos quais três feixes do primeiro tipo, dois do segundo, e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um pacote de cada tipo?

O problema resulta no seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=39\\ 2x+3y+z&=34\\ x+2y+3z&=26 \end{aligned}$$

Para resolvê-lo, efetuaram-se operações sobre colunas da primeira tabela para reduzi-la à segunda, conforme ilustrado abaixo:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 26 & 34 & 39 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 2\\ 36 & 1 & 1\\ 99 & 24 & 39 \end{array}}$$

É notável que a segunda tabela representa as equações $36z=99$, $5y+z=24$ e $3x+2y+z=39$, a partir das quais foram determinados os valores de *x*, *y* e *z*.

2.2 Como surgiu o termo "matriz"

O nome "matriz" foi dado por James Joseph Sylvester, em 1850, que adotou o significado coloquial da referida palavra, qual seja: local onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como "... um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número *p* e escolher à vontade *p* linhas e *p* colunas...” (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pag. 363-370). Nesse trecho é possível observar que Sylvester ainda via as matrizes simplesmente como ingrediente dos determinantes.

2.3 A origem da teoria das matrizes

A teoria das matrizes teve origem com um artigo do inglês Arthur Cayley, em 1855. Cayley salientou o fato de mesmo que pela lógica a noção de matriz anteceda a de determinante, historicamente ocorreu o inverso, pois os determinantes já eram usados na resolução de sistemas de equações lineares há muito tempo.

Vários matemáticos deram a sua contribuição para o desenvolvimento da teoria das matrizes, como James Joseph Sylvester (1814-1897), Benjamin Peirce (1809-1880) e seu filho Charles S. Peirce (1839-1914), no entanto, o mérito da invenção é geralmente conferido a Cayley.

Quanto às matrizes, Cayley definiu a ideia de operá-las como na álgebra e introduziu-as para simplificar a notação de uma transformação linear. Assim, ao invés de:

$$\begin{matrix} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{matrix} \quad \text{escrevia} \quad (x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y)$$

A partir da observação do efeito de duas transformações sucessivas definiu o produto de matrizes. Em seguida, chegou a ideia de matriz inversa, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro (a matriz identidade). Três anos depois, em outro artigo, Cayley introduziu os conceitos de adição de matrizes e de multiplicação de matrizes por escalares, enfatizando as propriedades algébricas dessas operações. Anos depois, Cayley se encarregou de encontrar inúmeras aplicações para as matrizes.

Entretanto, antes de Cayley iniciar estudar matrizes, muitos resultados da teoria já haviam sido descobertos por matemáticos dos séculos XVIII e XIX, quando estes passaram a investigar a Teoria das Formas Quadráticas.

Naquela época, as formas quadráticas eram tratadas escalarmente, hoje se faz uso da notação e metodologia matricial no estudo dessas. Veja a representação de uma forma quadrática de duas variáveis via essas duas notações (escalar e matricial):

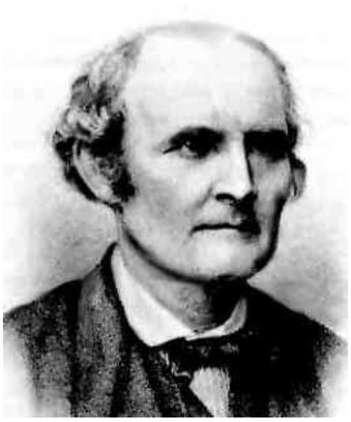
$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x\ y)\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A noção de matriz foi usada implicitamente pela primeira vez por Lagrange (1790), quando o mesmo reduziu a caracterização dos máximos e mínimos, de uma função real de várias variáveis, ao estudo do sinal da forma quadrática associada à matriz das segundas derivadas dessa função. A conclusão a qual chegou trabalhando escalarmente hoje é expressa em termos de "matriz positiva definida".

Pode-se afirmar que a Teoria das Matrizes teve como mãe a Teoria das Formas Quadráticas. Porém, hoje o estudo das formas quadráticas é simplesmente um capítulo dessa teoria. Além disso, constata-se que os determinantes não contribuíram em nada para o desenvolvimento da Teoria das Matrizes.

2.4 Biografia de Arthur Cayley

Figura 1 - Arthur Cayley



Fonte: Biblioteca do Congresso

O matemático inglês Arthur Cayley nasceu em 16 de agosto de 1821, na cidade de Richmond, Surrey, e estudou no Trinity College, Cambridge, onde se destacou e concluiu a graduação em 1842. Tempos depois resolveu estudar direito e trabalhar na área, mesmo assim continuou os seus estudos em matemática. Enquanto aluno de direito, assistiu a palestras de Hamilton sobre os quatérnios. No ano de 1863 decidiu abandonar a prática jurídica e dedicar-se exclusivamente à matemática, após ter sido convidado a reger a cátedra sadleriana de Cambridge.

Em volume de produção matemática, em toda a história, Cayley ocupa o terceiro lugar, sendo superado apenas por Euler e Cauchy. Suas primeiras publicações ocorreram quando ainda era graduando em Cambridge, durante o período em que se dedicou à prática jurídica publicou entre 200 e 300 artigos e continuou pelo resto da vida prolífico nessa atividade. Suas obras completas foram publicadas em Cambridge, distribuídas em 13 volumes, e receberam o título "The Collected Mathematical papers of Arthur Cayley", (Coletânea dos escritos matemáticos de Arthur Cayley).

Muitas áreas da matemática foram abordadas e enriquecidas por Cayley, como: a geometria analítica, a teoria das transformações, teoria dos determinantes, teoria das curvas e superfícies, teoria das funções abelianas, etc. Além disso, já consideramos neste capítulo o seu trabalho na álgebra das matrizes. Contudo, considera-se o seu trabalho mais importante a criação e desenvolvimento da teoria dos invariantes, cuja origem é encontrada em estudos feitos por Lagrange, Gauss e, em particular, Boole. O interesse por esta área foi compartilhado com Sylvester e os dois, que na época moravam em Londres, fizeram novas descobertas que contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento desta teoria.

As características dos artigos que Cayley escreveu, refletem a sua formação jurídica e marcaram seu estilo matemático. Possuía uma capacidade de memorização extraordinária, era calmo, equilibrado e educado. Cayley recebeu o nome "o matemático dos matemáticos".

Cayley gostava de ler romances, não somente em inglês como também em outras línguas: alemão, francês, italiano e grego. Entre seus mais variados talentos, destaca-se o de pintar aquarelas. Apreciava a natureza de uma forma geral e era considerado um alpinista, por ter feito diversas viagens para grandes caminhadas e para escalar montanhas. Conta-se que uma vez Cayley declarou que o motivo que o levava a escalar montanhas era a sensação proporcionada pela chegada ao cume, que considerava ser idêntica a de solucionar um problema matemático difícil ou concluir uma teoria matemática complexa.

Cayley faleceu em Cambridge no dia 26 de janeiro de 1895, antes mesmo de suas obras serem publicadas totalmente.

3 MATRIZES

3.1 Definição

Verifique a tabela a seguir, que indica as notas de José, Maria e Ricardo, em quatro disciplinas (Português, Matemática, Química e Física):

Tabela 1- Nota dos alunos

Nome	Português	Matemática	Química	Física
José	8,5	9,0	10,0	9,5
Maria	9,0	10,0	8,5	8,0
Ricardo	8,0	7,0	8,5	7,5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma tabela desse tipo, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 4 colunas, denomina-se matriz *3×4* (lê-se três por quatro) e podemos representá-la por:

$$M = \begin{bmatrix} 8{,}5 & 9{,}0 & 10{,}0 & 9{,}5 \\ 9{,}0 & 10{,}0 & 8{,}5 & 8{,}0 \\ 8{,}0 & 7{,}0 & 8{,}5 & 7{,}5 \end{bmatrix}.$$

Definição: Sejam m e n dois números naturais e não nulos, chama-se *matriz m por n* (indica-se $m \times n$) toda tabela M de elementos (números, funções, etc.) dispostos em m linhas e n colunas.

Outros exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ matriz } 2\times 2; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1{,}3 \\ 13 & 4 & -7 \\ \sqrt{2} & -8 & 20 \end{bmatrix}, \text{ matriz } 3\times 3; \text{ e } C = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ matriz } 3\times 2.$$

3.2 Representação algébrica

Usam-se sempre letras maiúsculas para denotar matrizes. Cada elemento é indicado por a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n), uma matriz $m\times n$ é representada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ ou } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ ou } M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Pode-se abreviadamente representar uma matriz por: $M = (a_{ij})$; $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ...,n\}$ ou ainda $M = (a_{ij})_{n \times m}$.

Exemplo: Vamos construir a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i + j$.

Solução:

Temos, por definição:

$a_{11} = 1 + 1 = 2$; $a_{12} = 1 + 2 = 3$; $a_{13} = 1 + 3 = 4$;

$a_{21} = 2 + 1 = 3$; $a_{22} = 2 + 2 = 4$; $a_{23} = 2 + 3 = 5$;

$a_{31} = 3 + 1 = 4$; $a_{32} = 3 + 2 = 5$; $a_{33} = 3 + 3 = 6$.

Logo, a matriz procurada é: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

3.3 Tipos de matrizes

É notável que algumas matrizes possuam propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer, como o número de linhas ou colunas, ou ainda, a natureza de seus elementos, e por apresentarem uma utilidade maior nesse estudo, recebem nomes especiais.

3.3.1 Matriz quadrada

Toda matriz que tem o mesmo número de linhas e colunas, isto é, $m = n$, recebe o nome de matriz quadrada.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 & -4 \\ 10 & 1 & 7 \\ -5 & 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix},\ \text{e}\ C = \begin{bmatrix} 12 & -11 & 10 & -9 \\ -8 & 7 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 14 \end{bmatrix}.$$

Em uma matriz quadrada de ordem n, o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, isto é, $\{ a_{ij} \mid i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ compõem a sua “diagonal principal”. A “diagonal secundária” é formada pelo conjunto dos elementos que têm soma de índices igual a $n+1$, isto é: $\{ a_{ij} \mid i+j = n+1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, ..., a_{n1}\}$.

Exemplo: A diagonal principal da matriz C, dada no exemplo anterior, é $\{12, 7, 2, 14\}$, já sua diagonal secundária é $\{-9, -3, -6, 0\}$.

3.3.2 Matriz nula

Matriz nula é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero, ou seja, $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Exemplos:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3.3 Matriz linha

A matriz que só tem uma linha, isto é, $m = 1$, recebe o nome de matriz linha.

Exemplos:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1{,}5 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 9 \end{bmatrix}.$$

3.3.4 Matriz coluna

Matriz coluna é toda matriz que possui uma única coluna, ou seja, $n = 1$.

Exemplos:

$$K = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 13 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \\ 7{,}9 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

3.3.5 Matriz diagonal

Matriz diagonal é toda matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, isto é, os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos:

$$N = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ O = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3.6 Matriz identidade

Matriz identidade é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1, ou seja, $a_{ij} = 1$, para todo $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$. Uma matriz identidade de ordem n é representada por I_n.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3.7 Matriz triangular superior

Matriz triangular superior é toda matriz quadrada que tem todos os elementos abaixo da diagonal principal iguais a zero, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$.

Exemplos:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} 6 & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.3.8 Matriz triangular inferior

Matriz triangular inferior é toda matriz quadrada que tem todos os elementos acima da diagonal principal iguais a zero, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$.

Exemplos:

$$T = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 1 & 1{,}3 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ \sqrt{6} & 1 & 0 \\ 15 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } V = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 10 & 0 \\ 8 & 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

3.4 Igualdade entre matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais, $A = B$, quando são do mesmo tipo e todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo: Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{25} & 2^2 \\ -6 & 4^0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} e\ C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos que $A = B$, pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$. Por outro lado, $B \neq C$, pois $b_{22} \neq c_{22}$.

3.5 Operações com matrizes

3.5.1 Adição

3.5.1.1 Definição

Consideremos as tabelas a seguir, que descrevem os resultados obtidos numa pesquisa feita por uma escola, para identificar a origem étnica de seus alunos:

Tabela 2 - Origem étnica: Ensino fundamental

Origem étnica	Meninos	Meninas
Branca	280	315
Preta	117	102
Amarela	56	67

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 - Origem étnica: Ensino médio

Origem étnica	Meninos	Meninas
Branca	225	203
Preta	56	69
Amarela	73	88

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se quisermos montar uma tabela que descreva a origem étnica dos alunos dessa escola apenas pelo gênero, ou seja, independente do nível escolar, teremos que somar os elementos correspondentes das duas tabelas anteriores. Escrevendo as matrizes correspondentes a essas tabelas, temos:

$$\begin{bmatrix} 280 & 315 \\ 117 & 102 \\ 56 & 67 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 225 & 203 \\ 56 & 69 \\ 73 & 88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 505 & 518 \\ 173 & 171 \\ 129 & 155 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos escrever a tabela a seguir:

Tabela 4 - Origem étnica dos alunos da escola

Origem étnica	Meninos	Meninas
Branca	505	518
Preta	173	171
Amarela	129	155

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste exemplo, acabamos de aplicar uma operação com matrizes: a adição.

Definição: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B (indica-se $A+B$), a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j, isto é, cada elemento é obtido somando os elementos correspondentes em A e B.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 13 & 7 \\ -3 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 21 & 0 \\ -3 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ temos:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 8+(-3) & 0+2 & 13+21 & 7+0 \\ -3+(-3) & -5+5 & 4+7 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 34 & 7 \\ -6 & 0 & 11 & 7 \end{bmatrix}.$$

3.5.1.2 Propriedades

As propriedades da adição de matrizes são semelhantes às da adição de números reais.

Quaisquer que sejam as matrizes A, B e C do tipo $m \times n$, temos:

i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade)

Demonstração: Fazendo $(A + B) + C = X$ e $A + (B + C) = Y$, temos:

$x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = y_{ij}$ para todo i e todo j.

ii) $A + B = B + A$ (comutatividade)

Demonstração: Fazendo $A + B = X$ e $B + A = Y$, temos:

$x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = y_{ij}$ para todo i e todo j.

iii) $\exists\ O$; $A + O = A$ (Existência do elemento neutro)

Demonstração: Partindo da hipótese que $A + O = A$, temos:

$a_{ij} + o_{ij} = a_{ij} \Rightarrow o_{ij} = 0$, para todo i e todo j, ou seja, a matriz nula do tipo $m\times n$ é o elemento neutro da adição de matrizes.

iv) $\exists\ A'$; $A + A' = O$ (Existência do elemento simétrico)

Demonstração: Partindo da hipótese que $A + A' = O$, temos:

$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Rightarrow a'_{ij} = -a_{ij}$, p/ todo i e todo j, ou seja, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A', na qual cada elemento é simétrico do correspondente em A.

3.5.1.3 Matriz oposta

Denomina-se matriz oposta de uma matriz $A = (\ a_{ij}\ )_{m\times n}$ (indica-se $-A$) a matriz $A' = (\ a'_{ij}\ )_{m\times n}$ tal que $A + A' = O$, isto é, a matriz cujos elementos são os simétricos dos elementos correspondentes em A.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 5 & 1 \\ 3 & -10 & 6 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 9 & -5 & -1 \\ -3 & 10 & -6 \\ -7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 5 \\ -9 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow -B = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.5.1.4 Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (\ a_{ij}\ )_{m\times n}$ e $B = (\ b_{ij}\ )_{m\times n}$, denomina-se *diferença* $A - B$ a matriz resultante da adição de A com a oposta de B.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 9 & -7 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ temos:

$$A - B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 9 & -7 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 9 & -7 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 10 & -12 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.5.2 Multiplicação de uma matriz por um escalar

3.5.2.1 Definição

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, vamos determinar $M + M$. Temos,

$$M + M = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 8 \\ -6 & 10 & 16 \end{bmatrix}.$$

Considerando que $M + M = 2M$, temos:

$$2M = 2\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 6 & 2(-2) & 2\cdot 4 \\ 2(-3) & 2\cdot 5 & 2.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 8 \\ -6 & 10 & 16 \end{bmatrix}.$$

Observamos, então, que a multiplicação de um escalar por uma matriz resulta em uma nova matriz, cujos elementos são obtidos multiplicando o escalar por cada um dos elementos da matriz dada.

Definição: Dada uma matriz $A = (\ a_{ij}\ )_{m\times n}$ e um escalar k, o produto kA é uma matriz $B = (\ b_{ij}\ )_{m\times n}$ cujos elementos são $b_{ij} = k.a_{ij}$ p/ todo i e todo j.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 4 & -12 & 2 \end{bmatrix}$, temos:

i) $5A = \begin{bmatrix} 5(-1) & 5\cdot 4 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 7 \\ 5(-9) & 5\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 20 \\ 15 & 35 \\ -45 & 0 \end{bmatrix}$.

ii) $\frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-8) & \frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 4 & \frac{1}{2}(-12) & \frac{1}{2}\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

3.5.2.2 Propriedades

Dadas as matrizes $A = (\ a_{ij}\ )_{m\times n}$ e $B = (\ b_{ij}\ )_{m\times n}$ e os escalares $k, w \in \Re$, temos:

i) $(k + w)A = k.A + w.A$ (distributividade)

Demonstração:

Seja $(k + w)A = X = (\ x_{ij}\ )_{m\times n}$, $k.A = Y = (\ y_{ij}\ )_{m\times n}$ e $w.A = Z = (\ z_{ij}\ )_{m\times n}$, temos:

$x_{ij} = (k+w)a_{ij} = (ka_{ij}) + (wa_{ij}) = y_{ij} + z_{ij}$, p/ todo i e p/ todo j, ou seja, $(k + w)A = k.A + w.A$.

ii) $k(A + B) = k.A + k.B$ (distributividade)

Demonstração:

Seja $k(A + B) = X = (\ x_{ij}\ )_{m\times n}$, $k.A = Y = (\ y_{ij}\ )_{m\times n}$ e $k.B = Z = (\ z_{ij}\ )_{m\times n}$, temos:

$x_{ij} = k(a_{ij} + b_{ij}) = (ka_{ij}) + (kb_{ij}) = y_{ij} + z_{ij}$, p/ todo i e p/ todo j, ou seja, $k(A + B) = k.A + k.B$.

iii) $k(wA) = (kw)A$ (associatividade)

Demonstração:

Seja $k(w.A) = X = (\ x_{ij}\ )_{m\times n}$ e $(kw)A = Y = (\ y_{ij}\ )_{m\times n}$, temos:

$x_{ij} = k(wa_{ij}) = (kw)a_{ij} = y_{ij}$, p/ todo i e p/ todo j, ou seja, $k(wA) = (kw)A$.

iv) $1\,A = A$ (existência do elemento neutro)

Demonstração:

Temos $1.a_{ij} = a_{ij}$, p/ todo i e p/ todo j, ou seja, $1.A = A$.

3.5.3 Multiplicação de matrizes

3.5.3.1 Definição

Veja a situação a seguir:

Durante a primeira fase da Copa do Mundo de futebol, realizada no Brasil em 2014, o grupo **A** era formado por: Brasil, Croácia, México e Camarões. Observe na tabela os resultados de cada um desses quatro países (número de vitórias, empates e derrotas):

Tabela 5 - Grupo A (1ª fase)

País	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	2	1	0
Croácia	1	0	2
México	2	1	0
Camarões	0	0	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a matriz *R* vamos representar esses resultados:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o regulamento da Copa, cada vitória, empate e derrota corresponde a 3 pontos, 1 ponto e 0 ponto respectivamente. Veja a tabela:

Tabela 6 - Resultados e pontos correspondentes

Resultado	Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a matriz *P* vamos registrar esse fato:

$$P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Veja como foi verificado o total de pontos feitos por cada seleção, após o término da 1ª fase:

Brasil: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 7$

Croácia: $1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$

México: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 7$

Camarões: $0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$

Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é resultante da multiplicação de *R* por *P*:

$$R \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que o Brasil fez 7 pontos, a Croácia 3 pontos, o México 7 pontos e o Camarões não pontuou.

Esse exemplo sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Veja agora a definição matemática:

Definição: Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se *produto AB* a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que

$$C_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e todo $k \in \{1, 2, 3, ..., p\}$.

Observações:

a) só podemos efetuar a multiplicação de duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Além disso, a matriz $C = AB$ será de ordem $m \times p$;
b) o elemento c_{ij} (*i*-ésima linha e *j*-ésima coluna da matriz *C*) é obtido, multiplicando os elementos da *i*-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da *j*-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

Exemplos:

i) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & -5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & -5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)3 + 7 \cdot 8 & (-1)(-4) + 7 \cdot 0 \\ 9 \cdot 3 + (-5)8 & 9(-4) + (-5)0 \\ 10 \cdot 3 + 2 \cdot 8 & 10(-4) + 2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 4 \\ -13 & -36 \\ 46 & -40 \end{bmatrix}.$$

ii) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$, temos:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) + (-5)1 + 0 \cdot 4 + (-2)(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}.$$

iii) Sejam as matrizes $X = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 11 & -5 \\ -4 & 3 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 25 & -10 \\ 20 & -5 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$.

Não é possível efetuar a multiplicação $X \cdot Y$, pois o número de colunas da primeira matriz é diferente do número de linhas da segunda matriz.

3.5.3.2 Propriedades

A multiplicação de matrizes apresenta as seguintes propriedades:

i) $AI_n = A$ e $I_mA = A$

Demonstração: Sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $I_n = (x_{ij})_{n \times n}$ e $B = AI_n = (b_{ij})_{m \times n}$. Temos:

$b_{ij} = a_{i1}.x_{1j} + a_{i2}.x_{2j} + a_{i3}.x_{3j} + ... + a_{ii}.x_{ii} + ... + a_{in}.x_{nj}$ e como I_n é a matriz identidade, $x_{ij} = 1$, se $i = j$ e $x_{ij} = 0$ se $i \neq j$, temos

$b_{ij} = a_{i1}.0 + a_{i2}.0 + a_{i3}.0 + ... + a_{ii}.1 + ... + a_{in}.0 = a_{ii}$, p/ todo i e todo j.

Então $A \cdot I_n = A$. Analogamente mostra-se que $I_m \cdot A = A$.

ii) $(AB)C = A(BC)$ (associatividade)

Demonstração: Quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$. Fazendo $D = AB = (d_{ik})_{m\times p}$, $E = (AB)C = (e_{il})_{m\times r}$ e $F = BC = (f_{jl})_{n\times r}$, temos:

$$e_{il} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \cdot \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot f_{jl}$$

Então, $(AB)C = A(BC)$.

iii) $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita em relação à adição)

Demonstração: Quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{jk})_{n\times p}$. Fazendo $D = (A + B)C = (d_{ik})_{m\times p}$, temos:

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot c_{jk}$$

Então, $(A + B)C = AC + BC$.

iv) $C(A + B) = CA + CB$ (distributividade à esquerda)

Demonstração: Análoga a *iii)*.

v) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

Demonstração: Quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$. Fazendo $C = kA = (c_{ij})_{m\times n}$, $D = kB = (d_{ik})_{m\times p}$, $E = AB = (e_{ik})_{m\times p}$, $(Ka)B = (f_{\text{ik}})_{m\times p}$, $A(Kb) = (g_{\text{ik}})_{m\times p}$ e $k(AB) = (h_{\text{ik}})_{n\times p}$, temos:

$$f_{\text{ik}} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (k \cdot a_{ij}) b_{jk} = k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = h_{\text{ik}}, \text{ ou seja, } (kA)B = A(kB)$$

e

$$g_{\text{ik}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (k \cdot b_{jk}) = k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = h_{\text{ik}}, \text{ ou seja, } A(kB) = k(AB).$$

Então, $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

Observações:

a) a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, existem matrizes A e B tais que $AB \neq BA$. Veja:

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, então $AB \neq BA$, pois $AB = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$;

b) se ocorrer $AB = BA$, dizemos que as matrizes A e B comutam. Observe:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ comutam, pois: $AB = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$;

c) note ainda que $AB = 0$ (matriz nula), sem que $A = 0$ ou $B = 0$. Veja:

Se $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

3.6 Matriz transposta

3.6.1 Definição

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denomina-se *transposta* de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$ em que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Isto significa que a matriz A^t é obtida a partir de A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -2 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 & -7 \\ 7 & -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, temos:

$$A^t = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 0 & 12 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B^t = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 6 & -1 \\ 9 & 5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.6.2 Propriedades

A matriz transposta apresenta as seguintes propriedades:

i) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$;

Demonstração: Fazendo $(A^t)^t = (a''_{ij})_{m\times n}$, resulta:

$a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij}$ para todo i, j, ou seja, $(A^t)^t = A$.

ii) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, então $(A + B)^t = A^t + B^t$;

Demonstração: Fazendo A + B = C = $(c_{ij})_{m\times n}$ e $(A + B)^t = C^t = (c'_{ji})_{n\times m}$, temos:

$c'_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a'_{ji} + b'_{ji}$ para todo i, j, ou seja, $(A + B)^t = A^t + B^t$.

iii) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $k \in \Re$, então $(kA)^t = kA^t$;

Demonstração: Fazendo $(kA)^t = (a''_{ji})_{n\times m}$, resulta:

$a''_{ji} = ka_{ij} = ka'_{ji}$ para todo i, j, ou seja, $(kA)^t = kA^t$.

iv) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$ então $(AB)^t = B^tA^t$.

Demonstração: Fazendo $AB = C = (c_{ik})_{m\times p}$ e $(AB)^t = C^t = (c'_{ki})_{p\times m}$, resulta:

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}\, a'_{ji}.$$

3.6.3 Matriz simétrica

Denomina-se *matriz simétrica* toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = A$.

Decorre da definição que, se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e todo j. Segue exemplos:

$$W = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & -7 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} & 15 \\ \sqrt{2} & -9 & 1 \\ 15 & 1 & 11 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}.$$

3.6.4 Matriz anti-simétrica

Denomina-se *matriz anti-simétrica* toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = -A$.

Decorre da definição que, se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz anti-simétrica, então $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i e todo j.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & -6 & 0 & 8 \\ -1 & -4 & -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.7 Inversa de uma matriz

3.7.1 Definição

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, chama-se *inversa de A* a matriz A^{-1}, de mesma ordem, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Quando existe a matriz inversa de A, dizemos que A é uma matriz inversível ou não-singular.

3.7.2 Teorema

Se A é inversível, então é única a matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Demonstração: Admitamos que exista uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Temos:

$B = I_nB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n = A^{-1}$, ou seja, $B = A^{-1}$.

Exemplos:

i) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ pois:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \ \text{ e } \ A^{-1}A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

ii) Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$ é inversível, vamos determinar a sua inversa.

Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos:

$$A^{-1}A = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 5b & 7a + 11b \\ 3c + 5d & 7c + 11d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela definição de igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{matrix} 3a + 5b = 1 \\ 7a + 11b = 0 \end{matrix} \Rightarrow a = -\frac{11}{2} \text{ e } b = \frac{7}{2}. \quad \text{Além disso} \quad \begin{matrix} 3c + 5d = 0 \\ 7c + 11d = 1 \end{matrix} \Rightarrow c = \frac{5}{2} \text{ e } d = -\frac{3}{2}.$$

Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ pois temos também:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

iii) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ é singular (não é inversível), pois se $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ decorre:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 4a+8c & 4b+8d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E então:

$$\begin{matrix} a+2c=1 \\ 4a+8c=0 \end{matrix} \text{ (impossível)} \qquad \text{e} \qquad \begin{matrix} b+2d=0 \\ 4b+8d=1 \end{matrix} \text{ (impossível).}$$

Portanto, não existem *a*, *b*, *c*, *d* satisfazendo a definição.

4 ALGUMAS APLICAÇÕES DE MATRIZES

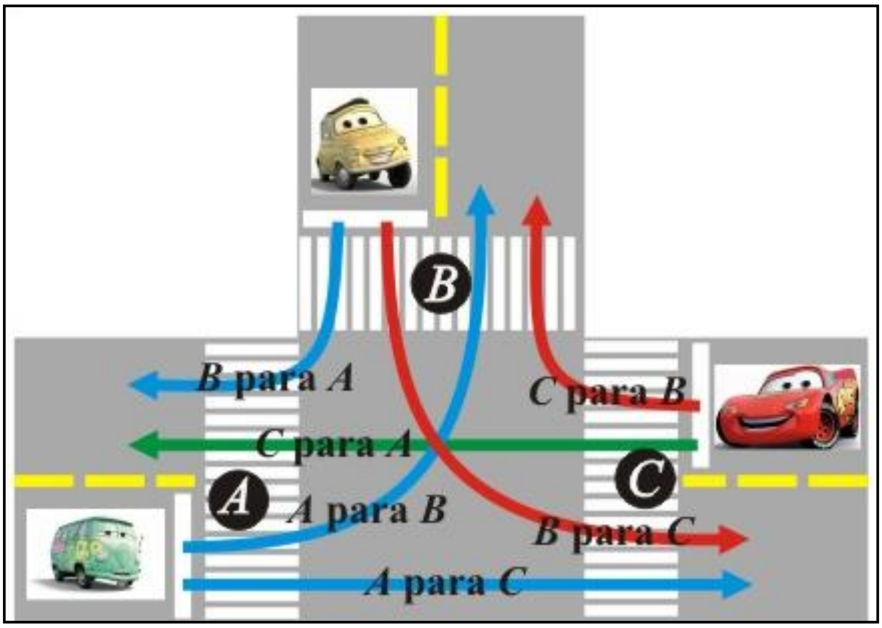
Neste capítulo, apresentamos sugestões de aplicações para a abordagem de Matrizes no ensino médio.

4.1 Matrizes e o Controle de tráfego

As matrizes podem servir de modelo para descrever muitas situações do nosso cotidiano. Veja um exemplo:

Um cruzamento de duas ruas de mão dupla é representado na figura a seguir:

Figura 2 - Cruzamento de ruas



Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com

Três conjuntos de semáforos controlam o fluxo de automóveis nos pontos A, B e C e o tempo (em minutos) durante o qual estes semáforos ficam ao mesmo tempo abertos, é indicado pelas matrizes S_1, S_2 e S_3, conforme a sequência em que aparecem.

Em um primeiro momento, ficam abertos (verdes) os semáforos de *A* para *B*, de *A* para *C* e de *B* para *A*, durante 1 minuto.

$$S_1 = \begin{array}{cc} & \textit{De} \\ A & \\ B & \\ C & \\ & \textit{Para} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \end{array}$$

Logo após, durante meio minuto, ficam abertos os semáforos de *B* para *A*, de *B* para *C* e de *C* para *B*.

$$S_2 = \begin{array}{rc} \textit{De} & \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \\ \textit{Para} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

E por último, ficam abertos os semáforos de *C* para *A*, de *C* para *B* e de *A* para *C*, durante meio minuto.

$$S_3 = \begin{array}{rc} \textit{De} & \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \\ \textit{Para} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

Somando as matrizes S_1, S_2 e S_3, obtemos uma matriz *M* que indica, no período de 2 minutos, o tempo que cada semáforo fica aberto em cada sentido.

$$M = \begin{array}{rc} \textit{De} & \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \textit{Para} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

O semáforo de *A* para *C* fica aberto durante 1 minuto e meio a cada período de 2 minutos, por exemplo. Se multiplicarmos a matriz *M* por 30, já que o período é de 2 minutos, obteremos o tempo, em minutos, em que cada semáforo fica aberto durante 1 hora.

$$N = 30 \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 45 \\ 45 & 0 & 15 \\ 15 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que nestas ruas passam até 20 carros por minuto cada vez que os semáforos abrem, multiplicando a matriz *N* por 20, obteremos a quantidade máxima de veículos que podem passar, no período de 1 hora, por este cruzamento.

$$20 \cdot N = \begin{bmatrix} 0 & 600 & 900 \\ 45 & 0 & 300 \\ 300 & 600 & 0 \end{bmatrix}$$

É possível um engarrafamento nesse cruzamento, caso o número de veículos em algum dos sentidos for maior que a quantidade máxima permitida. Contudo, este imprevisto pode ser resolvido fazendo uma alteração nos tempos de abertura dos semáforos, ou seja, alterando os valores das matrizes S_1, S_2 e S_3.

4.2 Matrizes e Endocrinologia

A tabela a seguir apresenta a quantidade aproximada de calorias que uma pessoa com 60 kg de massa corporal irá perder, realizando cada atividade física por um período de 1 hora:

Tabela 7 - Gasto calórico por atividade física

Peso	Andar de bicicleta	Caminhar acelerado	Correr a 12 km/h	Hidroginástica
60 kg	252 calorias	552 calorias	890 calorias	300 calorias

Fonte: Campos, 2008.

Suponhamos um acompanhamento de uma pessoa com este peso, por meio de um programa com estes exercícios ao longo de uma semana, conforme a tabela:

Tabela 8 – Tempo diário pra cada atividade (horas)

Dia da semana	Andar de bicicleta	Caminhar acelerado	Correr a 12 km/h	Hidroginástica
segunda-feira	1	0	0	1
terça-feira	0	0	1	0
quarta-feira	0,5	0,5	0	0
quinta-feira	0	0	0,5	1,5
sexta-feira	0,5	1	0	0

Fonte: Campos,2008.

Podemos construir uma matriz 4 × 1 com as informações da Tabela 7 e uma matriz 5 × 4 com as informações da tabela 8. Sendo assim, para determinarmos quantas calorias esta pessoa queimará em cada dia de exercício físico, basta fazer o produto entre essas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 252 \\ 552 \\ 890 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0 \cdot 252 + 0{,}0 \cdot 552 + 0{,}0 \cdot 890 + 1{,}0 \cdot 300 \\ 0{,}0 \cdot 252 + 0{,}0 \cdot 552 + 1{,}0 \cdot 890 + 0{,}0 \cdot 300 \\ 0{,}5 \cdot 252 + 0{,}5 \cdot 552 + 0{,}0 \cdot 890 + 0{,}0 \cdot 300 \\ 0{,}0 \cdot 252 + 0{,}0 \cdot 552 + 0{,}5 \cdot 890 + 1{,}5 \cdot 300 \\ 0{,}5 \cdot 252 + 1{,}0 \cdot 552 + 0{,}0 \cdot 890 + 0{,}0 \cdot 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 552 \\ 890 \\ 1016 \\ 895 \\ 678 \end{bmatrix}$$

Logo, com este programa de exercícios, a pessoa a que nos referimos nesta situação, queimará 552 calorias na segunda-feira, 890 calorias na terça-feira, 1016 calorias na quarta-feira, 895 calorias na quinta-feira e 678 calorias na sexta-feira.

4.3 Matrizes e Modelos populacionais

As matrizes são um instrumento importante para a análise do crescimento populacional. Podemos determinar, por exemplo, como os grupos etários, étnicos, de determinada população de indivíduos se modificam a cada ano.

Considera-se o mais simples o caso da população homogênea, com início no tempo $t = 0$, com um número p_0 de indivíduos aumentando ou diminuindo a uma taxa anual constante. Isto é, existe um número k tal que depois de 1 ano a população será $p_1 = kp_0$, após 2 anos será $p_2 = kp_1 = k^2p_0$, e assim sucessivamente. A população do ano seguinte é definida simplesmente multiplicando a população do ano atual por k. Após n anos, a população inicial p_0 foi multiplicada pelo fator k n vezes, e portanto, a população p_n será dada por

$$p_n = k^n p_0.$$

Caso a população esteja subdividida em grupos, a população p_n é substituída por uma matriz P_n cujos elementos especificam os números de indivíduos nos diferentes grupos. O "número de transição" k é então substituído pela "matriz de transição A" tal que a "matriz população" de cada ano seja multiplicada pela matriz A para se obter a matriz população do ano seguinte.

Vejamos um simples exemplo dessa aplicação:

Exemplo: A população total constante de 500.000 pessoas de um município é dividida entre a zona urbana e a zona rural. Seja U_n a população da zona urbana e R_n a população da zona rural após n anos. A distribuição da população desse município após n anos é descrita pela matriz população:

$$P_n = \begin{bmatrix} U_n \\ R_n \end{bmatrix}.$$

O nosso objetivo é analisar a modificação das populações urbanas e rurais ao longo de dois anos.

Suponha que a cada ano 15% da população da cidade se mudem para a zona rural, e que 10% da população rural se mudem para a cidade. Então, a população da cidade no próximo ano, U_{n+1}, será igual a 85% da população da cidade deste ano U_n, mais 10% da população rural R_n deste ano, de modo que:

$$U_{n+1} = (0,85)U_n + (0,10)R_n \quad \text{para qualquer } n \geq 0. \tag{1}$$

E a população rural no próximo ano, R_{n+1}, será igual a 15% da população urbana U_n deste ano, mais 90% da população rural R_n deste ano, de modo que:

$$R_{n+1} = (0{,}15)U_n + (0{,}90)R_n \text{ para qualquer } n \geq 0. \quad (2)$$

Escrevendo as equações (1) e (2) em forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ R_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_n \\ R_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

A *matriz de transição* para este exemplo é

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix}$$

Supondo que as populações iniciais, urbana e rural, sejam U_0 = 350.000 e R_0 = 150.000. Vamos determinar a distribuição da população deste município resultante das taxas de migração dadas. Para os primeiros dois anos encontramos que:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 350.000 \\ 150.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 312.500 \\ 187.500 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 312.500 \\ 187.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 284.375 \\ 215.625 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a população urbana está diminuindo e a população rural está aumentando durante este intervalo de tempo.

4.4 Matrizes e Criptografia

A criptografia é o conjunto de princípios e técnicas usadas para codificar e decodificar mensagens, utilizando pares de caracteres, de modo que apenas os que têm acesso às convenções combinadas possam lê-la, evitando assim que tabelas de freqüência de letras e outros métodos possibilitem a um decodificador não-amigável decifrá-la.

Dada uma mensagem para ser codificada, o primeiro passo é convertê-la da forma alfabética para a forma numérica. Para isso, utilizaremos a correspondência indicada no Quadro 1.

Quadro 1 - Correspondência entre letras e números

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	#
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esta correspondência pode ser alterada, mas para isso é necessário que o remetente e o destinatário combinem-na antes. Para melhor entendimento, usamos o símbolo # para indicar a inexistência de letras (espaços entre as palavras, etc).

Escolhe-se um par de matrizes quadradas, A e A^{-1}, tal que $A \cdot A^{1} = I = A^{-1} \cdot A$, cujos elementos devem ser números inteiros. O remetente vai usar a matriz A para codificar a mensagem, e o destinatário vai usar a matriz A^{-1} para decodificá-la.

Exemplo 1: Vamos supor que a mensagem a ser transmitida seja "ACREDITE EM VOCÊ" e que as matrizes (codificadora e decodificadora) sejam respectivamente, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

A matriz em que se escreve a mensagem será denominada M e terá seus elementos dispostos em duas linhas, pois a matriz codificadora A é de ordem 2:

$$M = \begin{bmatrix} 01 & 03 & 18 & 05 & 04 & 09 & 20 & 05 & 28 \\ 05 & 13 & 28 & 22 & 15 & 03 & 05 & 27 & 28 \end{bmatrix}.$$

Para codificação da mensagem, fazemos o produto AM e chamamos essa matriz de N:

$$N = AM = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 01 & 03 & 18 & 05 & 04 & 09 & 20 & 05 & 28 \\ 05 & 13 & 28 & 22 & 15 & 03 & 05 & 27 & 28 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 08 & 22 & 82 & 37 & 27 & 30 & 65 & 42 & 112 \\ 07 & 19 & 64 & 32 & 23 & 21 & 45 & 37 & 84 \end{bmatrix}$$

Quando esta mensagem codificada chegar ao destinatário, este deverá utilizar a matriz A^{-1} (matriz decodificadora) para decifrar a mensagem, pois

$$A^{-1}N = A^{-1}AM = IM = M.$$

Sendo assim, fazendo o produto $A^{-1}N$, o destinatário irá obter a matriz M do remetente:

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 08 & 22 & 82 & 37 & 27 & 30 & 65 & 42 & 112 \\ 07 & 19 & 64 & 32 & 23 & 21 & 45 & 37 & 84 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 01 & 03 & 18 & 05 & 04 & 09 & 20 & 05 & 28 \\ 05 & 13 & 28 & 22 & 15 & 03 & 05 & 27 & 28 \end{bmatrix}.$$

Note que o produto é de fato a matriz M enviada pelo remetente, portanto a mensagem codificada é:

01, 03, 18, 05, 04, 09, 20, 05, 28, 05, 13, 28, 22, 15, 03, 05, 27, 28.

O passo final de decodificação é:

01	03	18	05	04	09	20	05	28	05	13	28	22	15	03	05	27	28
A	C	R	E	D	I	T	E	#	E	M	#	V	O	C	Ê	.	#

Veremos a seguir outro exemplo, agora utilizando uma matriz de ordem 3.

Exemplo 2: Suponhamos que a mensagem a ser transmitida é “LICENCIATURA EM MATEMÁTICA”. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Como as matrizes codificadora e decodificadora são de ordem 3, a matriz M terá seus elementos dispostos em 3 linhas:

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 09 & 03 & 05 & 14 & 03 & 09 & 01 & 20 \\ 21 & 18 & 01 & 28 & 05 & 13 & 28 & 13 & 01 \\ 20 & 05 & 13 & 01 & 20 & 09 & 03 & 01 & 27 \end{bmatrix}$$

Para codificar a mensagem, efetuamos a multiplicação AM para obter:

$$N = AM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 09 & 03 & 05 & 14 & 03 & 09 & 01 & 20 \\ 21 & 18 & 01 & 28 & 05 & 13 & 28 & 13 & 01 \\ 20 & 05 & 13 & 01 & 20 & 09 & 03 & 01 & 27 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 97 & 55 & 36 & 45 & 87 & 40 & 61 & 18 & 115 \\ 25 & 31 & -6 & 37 & 13 & 10 & 43 & 14 & 14 \\ 117 & 50 & 49 & 46 & 107 & 49 & 64 & 19 & 142 \end{bmatrix}$$

Quando esta mensagem chegar ao destinatário, o mesmo irá decifrá-la calculando o produto $A^{-1}N$. Ou seja,

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 97 & 55 & 36 & 45 & 87 & 40 & 61 & 18 & 115 \\ 25 & 31 & -6 & 37 & 13 & 10 & 43 & 14 & 14 \\ 117 & 50 & 49 & 46 & 107 & 49 & 64 & 19 & 142 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 09 & 03 & 05 & 14 & 03 & 09 & 01 & 20 \\ 21 & 18 & 01 & 28 & 05 & 13 & 28 & 13 & 01 \\ 20 & 05 & 13 & 01 & 20 & 09 & 03 & 01 & 27 \end{bmatrix} = M$$

Note que o produto é de fato a matriz M enviada pelo remetente, portanto a mensagem codificada é:

12, 09, 03, 05, 14, 03, 09, 01, 20, 21, 18, 01, 28, 05, 13, 28, 13, 01, 20, 05, 13, 01, 20, 09, 03, 01, 27.

Logo, a mensagem original é:

12 09 03 05 14 03 09 01 20 21 18 01 28 05 13 28 13 01 20 05 13 01 20 09 03 01 27

L I C E N C I A T U R A # E M # M A T E M Á T I C A .

Este método pode ser feito de forma rápida e automática por computador, aumentando assim, a sua segurança. Mas, também pode ser feito apenas com lápis e papel, o que demonstra a sua utilidade. Tudo o que precisa ser mantido em sigilo são as matrizes codificadora e decodificadora.

4.5 Matrizes e Computação gráfica

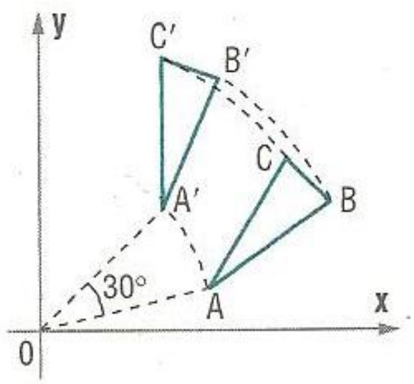
As matrizes têm muitas aplicações na computação gráfica. Se ampliarmos uma imagem na tela de um computador o máximo possível, iremos perceber que a imagem é formada por pequenos pontos. Esses pontos são chamados “pixels” e por incrível que pareça são elementos de uma matriz. Por exemplo, uma imagem de resolução 1024×768 têm $1024 \cdot 768 = 786.432$ pixels ordenados em 1024 colunas e 768 linhas. É através de operações com matrizes, que um programa gráfico altera a posição dos pixels que compõem uma imagem, fazendo-a girar, mudar de posição ou de escala. Na computação gráfica, isso recebe o nome de transformação geométrica.

4.5.1 Transformações geométricas

As transformações geométricas básicas no plano são: rotação, escala e translação.

4.5.1.1 Rotação

Figura 3 - Rotação do triângulo ABC, de 30° no sentido anti-horário, em torno da origem



Fonte: DANTE, 2004, p. 223.

Uma rotação de α graus de um ponto (x,y), em torno da origem no sentido anti-horário, é feita a partir do produto da matriz $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ com a matriz $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, que resulta em uma matriz $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, a qual indica a nova posição (x',y') do ponto após a rotação: $P' = RP$.

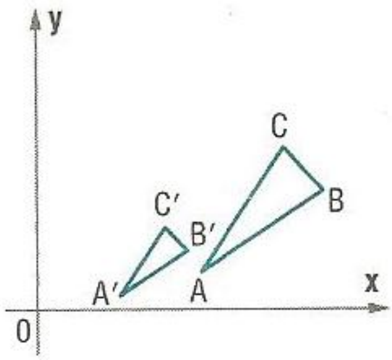
Exemplo: Encontrar a nova posição do ponto (4,5) após uma rotação de 180° no sentido anti-horário, em torno da origem.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180° & -sen 180° \\ sen 180° & \cos 180° \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Logo, a nova posição será (−4,−5).

4.5.1.2 Escala

Figura 4 - Mudança de escala do triângulo ABC em 50%.



Fonte: DANTE, 2004, p. 223.

Uma mudança de escala de um ponto (x,y) em relação à origem, usando um fator multiplicativo Ex para a coordenada x e um fator Ey para a coordenada y, se dá através da multiplicação da matriz $E = \begin{bmatrix} Ex & 0 \\ 0 & Ey \end{bmatrix}$ pela matriz $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, de modo que $P' = EP$.

Exemplo: Escalar as duas coordenadas do ponto (−1,5) em 100%.

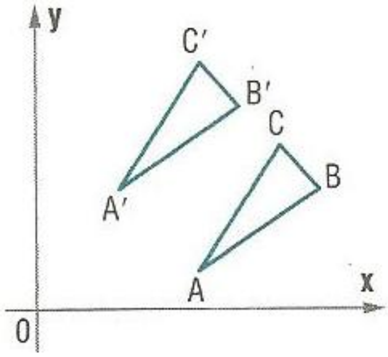
Aumentar 100% é multiplicar por 2. Assim, $Ex = 2$ e $Ey = 2$. Então,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Logo, a nova posição será (−2,10).

4.5.1.3 Translação

Figura 5 - Translação do triângulo ABC em 2 unidades para a esquerda e 2 unidades para cima.



Fonte: DANTE, 2004, p. 223.

Uma translação de um ponto (*x*,*y*) de *Tx* unidades para direita na coordenada *x* e *Ty* unidades para cima na coordenada *y*, se dá por meio da soma das matrizes $T = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, da qual resulta uma matriz $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, com a nova posição (x', y') do ponto após a translação: $P' = T + P$.

Exemplo: Transladar o ponto (−3,4) em 7 unidades para cima e 5 unidades para a esquerda.

Sendo $Tx = -5$ e $Ty = 7$, temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Logo, a nova posição será (−8,11).

4.5.2 Combinação de transformações geométricas.

A representação matricial de transformações geométricas permite a combinação de matrizes de rotação e escala em uma única matriz. A translação não pode ser combinada com as demais, devido ao fato dessa transformação não ser efetuada por uma multiplicação de matrizes e sim por uma adição.

Com o intuito de fazer com que quaisquer das três transformações sejam realizadas com multiplicações e, assim, ser possível combiná-las em uma única matriz, criou-se o conceito de *coordenadas homogêneas.*

Usando esse conceito, um ponto (x,y) do plano fica descrito pela matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Já as matrizes R de rotação, E de escala e T de translação ficam, respectivamente:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na combinação de transformações geométricas com a utilização de coordenadas homogêneas, simplesmente multiplica-se o ponto original pela sequência contrária das transformações que modificarão o(s) ponto(s). Por exemplo, para rotacionar, escalar e transladar um ponto **P**, nessa sequência, isto é, primeiro rotacionar, em seguida escalar e por último transladar, deve-se efetuar as seguintes multiplicações: $P' = TERP$.

Exemplo 1: Dado o ponto (2,5), para primeiro rotacioná-lo em 90° no sentido anti-horário, depois escalar as suas coordenadas em 100% e por último transladá-lo em 3 unidades para baixo e 6 para a direita, efetuam-se as seguintes multiplicações:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, as novas coordenadas do ponto **P** serão (−4,1).

Exemplo 2: Girar em 45º no sentido horário o segmento **AB** em torno do ponto **A** sabendo que **A**(1,4) e **B**(2,6).

Como o ponto **A** não é a origem, deve-se primeiro transladar o segmento **AB** para **A’B’** de tal forma que **A’**(0,0). Depois, rotaciona-se o ponto **B’** e, por último, translada-se o segmento devolvendo o ponto **A’** para a coordenada original.

Sendo assim, as novas coordenadas do ponto **B** serão obtidas de:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, **B** será $\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa referente à história das matrizes revela o surpreendente fato, alegado pelo matemático inglês Arthur Cayley, das matrizes terem surgido depois dos determinantes, visto que estes já eram usados há muito tempo na resolução de sistemas de equações lineares, embora que pela lógica, a ideia de matriz preceda a de determinante.

Revisar a teoria das matrizes possibilita uma maior compreensão de suas definições, conceitos, formas de representação, tipos, operações básicas e também de suas propriedades, através das demonstrações.

A elaboração deste trabalho exigiu cautela. Foram feitas diversas pesquisas, para obter aplicações claras, apropriadas e de fácil entendimento para o aluno, pois para modelar algumas é necessário o conhecimento de teorias mais aprofundadas sobre matrizes, como a álgebra linear. Sendo o enfoque deste trabalho no ensino médio, foi preciso a utilização de uma linguagem adequada a esse nível de ensino, respeitando o rigor matemático.

Uma possível proposta de continuidade a esse trabalho seria o estudo de como o uso de aplicações de matrizes influencia na aprendizagem deste conteúdo, o que iria comprovar de fato algumas das hipóteses levantadas neste.

Espera-se que as ideias aqui apresentadas promovam discussões e reflexões acerca do estudo de matrizes no ensino médio, e que assim o professor possa construir a teoria matricial recorrendo a aplicações, através de exemplos práticos, contextualizados ou até mesmo da menção em forma de história.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli Rodrigues. **Álgebra linear.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

BOYER, C. **História da matemática.** 2. ed. Trad. Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CAMPOS, Cristiani dos Santos. **Tratamento da diabetes:** uma aplicação de matrizes. Jandaia do Sul, 2008. 23 p. Artigo. Universidade Estadual de Londrina.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 4:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

KRAIESKI, Protasio. **Abordagem de matrizes no ensino médio:** uma avaliação crítica através dos livros didáticos, com sugestões de aplicações. Florianópolis, 1999. 82 p. Monografia (Licenciatura em Matemática). Centro de Ciências Físicas e Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina.

KUERTEN, Cristini. **Algumas aplicações de matrizes.** Florianópolis, 2002. 67 p. Monografia (Licenciatura em Matemática). Centro de Ciências Físicas e Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina.

NIETO, Solange dos Santos; LOPES, Célia M. Carvalho; SILVA, Alcides Ferreira da. **Criptografia:** uma aplicação de álgebra linear. Disponível em: <http://www.mackenzie.br/fileadmin/Graduacao/EE/Producao/2008intertech-criptografia_1_.pdf>

SITES REFERIDOS

SURGIMENTO DA TEORIA DAS MATRIZES
http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html
Acesso em: 16 de abril de 2014

UMA BREVE HISTÓRIA DAS MATRIZES E DETERMINANTES
http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/uma-breve-historia-das-matrizes-e.html
Acesso em: 16 de abril de 2014

MATRIZES E O CONTROLE DE TRÁFEGO
http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/06/matrizes-e-o-controle-de-trafego.html
Acesso em: 02 de maio de 2014

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS
http://www.inf.pucrs.br/~pinho/CG/Aulas/Vis2d/Instanciamento/Instanciamento.htm
Acesso em: 08 de junho de 2014