UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TEOREMAS DE APROXIMAÇÕES E APLICAÇÕES

JOÃO EUDES PEREIRA ALVES

CAMPINA GRANDE - PB
Fevereiro de 2016

JOÃO EUDES PEREIRA ALVES

TEOREMAS DE APROXIMAÇÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE-PB

Fevereiro de 2016

A474t Alves, João Eudes Pereira.
Teoremas de aproximações e aplicações [manuscrito] / João Eudes Pereira Alves. - 2016.
51 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática".

1. Teoremas de aproximações. 2. Espaços métricos. 3. Topologia. 4. Teorema de Stone-Weierstrass. I. Título.

21. ed. CDD 514.3

JOÃO EUDES PEREIRA ALVES

TEOREMAS DE APROXIMAÇÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 11/02/2016

COMISSÃO EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Orientador

Luciana R. Freitas

Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Examinadora

Thiciany Matsudo Iwano

Prof. Me. Thiciany Matsudo Iwano
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Examinadora

Dedicatória

Dedico este trabalho a toda minha família e em especial a Elane. Que em momento algum deixaram de me apoiar ou de me incentivar para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e todos os meus familiares, e em especial a Elane, minha amada, que sempre me apoiou. Sem essas pessoas eu não teria chegado até aqui.

Agradeço ao meu orientador Dr. Aldo Trajano Lourêdo por ter me dado a oportunidade de estudar um tema tão importante e de várias aplicações em diversas áreas das ciências exatas, e pela força dada durante o curso. Além disso quero reconhecer por meio desses agradecimentos, e enfatizar a sua qualidade como profissional.

Agradeço as professoras Luciana Roze de Freitas e Thiciany Matsudo Iwano por terem aceitado fazer parte da minha banca. Em especial a professora Luciana Roze de Freitas por ter sido minha orientadora na iniciação científica.

Agradeço aos meus colegas de graduação: Tayrone , Weiller Felipe, Ricardo Araújo, Deywrhamany Oliveira, Joelma Patrícia, Jefferson Gonzaga, Fabio Dantas, Francielly Gomes, Wallace Ferreira, Josyclesio, Naelson, Paulino Rocha, Maxmuller, entre outros, que conviveram comigo durante o curso.

Agradeço aos professores de graduação: José Elias da Silva, Wanderson Rodrigo Guimarães, Joselma Soares, Manuel Milla Miranda, Victor Hugo, entre outros que aqui não pude citar.

Agradeço em especial ao professor Fernando Luiz Tavares da Silva que considero como um "pai" acadêmico. Quero reconhecer e enfatizar o ótimo profissional que é, além de que, para mim, será o eterno presidente do maior time de futebol do mundo, o TREZE FUTEBOL CLUBE.

Agradeço aos meus professores do ensino médio João Freires e Romero Soares Santana.

"O auge do meu egoísmo é querer ajudar."

(Raul Seixas e Marcelo Nova)

Resumo

Neste trabalho abordaremos os Teoremas de Aproximações de Weierstrass e Stone-Weierstrass, onde os mesmos são resultados importantes para a Análise Clássica. São muitas as aplicações desses teoremas, entretanto, por se tratar de um trabalho de conclusão de curso, o texto foi basicamente elaborado para servir de suporte à alunos da graduação. Por isso, focalizamos os resultados básicos os quais, em geral, são vistos em um curso de Bacharelado em Matemática. Assim, após uma breve introdução histórica, apresentaremos a teoria dos espaços métricos, topológicos e compactos. Em seguida apresentamos e demonstramos os teoremas citados acima. E por fim faremos algumas aplicações em sequências de funções.

Palavras chave: Weierstrass, Stone-Weierstrass, Análise Clássica.

Abstract

In this paper we discuss the approach of theorems Weierstrass and Stone-Weierstrass, where they are results important for Classical Analysis. There are many applications of these theorems, however, because it is a course conclusion work, the text was basically designed to serve the support of students graduation. Therefore, focus on the basic results which, in general, they are seen in a Bachelor course in Mathematics. So, after a brief historical introduction, present theory metric spaces, topological and compact. Then we present and demonstrate the theorems aforementioned. Finally we will make some applications sequences functions.

Key words: Weierstrass, Stone-Weierstrass, Classical analysis.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, faremos um estudo bibliográfico baseado nas referências [2], [4], [5] e [7], a qual tem por objetivo tornar o trabalho autossuficiente. O objetivo principal deste trabalho é apresentar, demonstrar e aplicar os importantes teoremas de Aproximação de Weierstrass e Stone-Weierstrass. Desta forma o trabalho ficou dividido na seguinte estrutura:

No capítulo 1 vamos falar sobre a vida desses dois grandes matemáticos Karl Wilhelm Theodor Weierstrass e Marshall Harvey Stone.

No capítulo 2 faremos a fundamentação teórica que servirá para entender as demonstrações dos teoremas de aproximações, contendo nesta parte a teoria dos Espaços Métricos, bem como a sua topologia, e por fim algumas noções de Espaços Compactos.

No capítulo 3 consta as demosntrações dos Teoremas de Aproximações de Weierstrass e Stone-Weierstrass.

No capítulo 4 faremos aplicações dos teoremas demonstrados no capítulo 3.

Capítulo 1

Parte histórica

Este capítulo contêm um pouco da história dos matemáticos Karl Weierstrass e Marshall Stone. Usamos a referência [1] e alguns sites espcializados em história da matemática.

1.1 Karl Weierstrass

Figura 1.1: Matemático Karl Wilhelm Theodor Weierstrass

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 - 1897) filho de um oficial alfandegário, quando jovem demonstrou habilidade em línguas e no trato com os números. Porém, por influência do pai, ingressou em um programa de leis e comércio da Universidade de Bonn, mas, para desgosto da família, concentrou-se mais na esgrima e na cerveja do que nos estudos, e retornou para casa, quatro anos mais tarde, sem nenhum diploma.

Em 1839, Weierstrass entrou para a Academia de Münster, com o objetivo de obter um título em educação secundária. Lá conheceu o matemático Christoph Gudermann, por quem foi orientado. As ideias de Gudermann influenciaram muito seu trabalho. Nos 15 anos seguintes à sua formatura, ensinou alemão, caligrafia, geografia e matemática em uma escola secundária. Por ser um professor secundário, muito do seu trabalho foi ignorado.

Somente em 1854 publicou um artigo de maior importância, o que lhe deu, da noite para o dia, fama matemática internacional. No mesmo ano recebeu, da Universidade de Königsberg, um título de doutor honorário, e, em 1856, na Universidade de Berlim, teve início sua carreira como professor universitário.

Em 1860 apresentou a primeira fórmula para uma função contínua que não fosse derivável em nenhum ponto, fortalecendo as teorias que o matemático Bernhard Bolzano desenvolveu em 1834, quando apresentou uma destas funções.

Seu trabalho forneceu as bases da teoria das funções analíticas. Weierstrass foi um pioneiro da moderna análise matemática e mentor da matemática Sofia Kovalevskaya[1]. Dentre seus mais brilhantes seguidores destaca-se também Georg Cantor e Edmund Husserl. Foi também o criador do conceito de limite de uma função.

1.2 Marshall Stone

Figura 1.2: Matemático Marshall Harvey Stone

[1]Sofia Kovalevskaya foi a primeira mulher a ser nomeada para a Academia de Ciências da Rússia e a terceira a conseguir um cargo acadêmico, como professora na Universidade de Estocolmo.

Marshall Harvey Stone (1903 - 1989) filho de Harlan Fiske Stone, que foi o Chefe de Justiça dos Estados Unidos em 1941-1946. A família de Marshall Stone esperava que ele se tornar-se um advogado como seu pai, mas ele se apaixonou pela matemática enquanto ele era um estudante da Universidade de Harvard. Ele completou seus estudos em Harvard tornando-se Ph.D. em 1926, com uma tese sobre equações diferenciais, que era supervisionado por George David Birkhoff.

Entre 1925 e 1937, ele lecionou em Harvard, Yale University, e na Universidade de Columbia. Stone foi promovido a professor titular na Universidade de Harvard em 1937. Em 1946, ele se tornou o presidente do Departamento de Matemática da Universidade de Chicago, uma posição que ocupou até 1952.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Este capítulo contêm algumas definições e resultados de espaços métricos, topológicos e compactos. Tais definições serão necessárias para o entendimento das demonstrações dos Teoremas de Aproximações e suas aplicações apresentadas no presente trabalho.

2.1 Espaços Métricos

Nesta seção usamos as referências [2] e [9] para estudarmos os conceitos de espaços métricos e sequências, bem como alguns resultados ligados a esses dois conceitos.

Definição 2.1. *(**Métrica**) Dado um conjunto $M \neq \varnothing$, seja $d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ uma aplicação e indicaremos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$, através da função d. Dizemos que d é uma **métrica** sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:*

$M_1)$ $d(x, x) = 0$;

$M_2)$ se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

$M_3)$ $d(x, y) = d(y, x)$;

$M_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemplo 2.1. *(**Métrica usual da reta**) Verifique que $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $d(x, y) = |x - y|$ é uma métrica.*

Solução: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$

$M_1)$ $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0.$

M_2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$. De fato,

$$x \neq y \Longrightarrow x - y \neq 0 \Longrightarrow |x - y| > 0.$$

Logo, $d(x, y) = |x - y| > 0$.

M_3) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Com efeito,

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x).$$

Portanto, $d(x, y) = d(y, x)$.

M_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. De fato, usando a desigualdade triangular para os números reais obtemos:

$$d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z).$$

Logo, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Consequentemente, segue-se que d é uma métrica.

Definição 2.2. *(**Espaço Métrico**) Um **espaço métrico** é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.*

Exemplo 2.2. *(**Espaço métrico real**) O par $(\mathbb{R}, d)$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais e d é a métrica usual da reta, é um espaço métrico.*

Definição 2.3. *(**Subespaço métrico**) Seja $E \subset M$ um subconjunto de um espaço métrico M e d uma métrica em M. A restrição d_1 de d a $E \times E$ é uma métrica em E. Dizemos então que (E, d_1) é um **subespaço métrico** de (M, d).*

Definição 2.4. *(**Bolas e Esferas**) Seja p um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $\epsilon > 0$, definimos:*

i) A **bola aberta de centro** p **e raio** ϵ, é o conjunto $B(p; \epsilon)$, dos pontos de M cuja distância ao ponto p é menor do que ϵ, ou seja,

$$B_\epsilon(p) = B(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \epsilon\}.$$

ii) A **bola fechada de centro** p **e raio** ϵ, é o conjunto $B[p; \epsilon]$, formados pelos pontos de M que estão a uma distância menor ou igual a ϵ do ponto p, ou seja

$$B_\epsilon[p] = B[p, \epsilon] = \{x \in M \mid d(x, p) \leq \epsilon\}.$$

iii) A **esfera de centro** p **e raio** ϵ, é o conjunto $S(p; \epsilon)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x, p) = \epsilon$. Assim,

$$S_\epsilon(p) = S(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) = \epsilon\}.$$

Definição 2.5. ***(Sequência)*** *Uma* ***sequência*** *num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, denotada por $x(n) = x_n$.*

Notações: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n).

Definição 2.6. ***(Subsequência)*** *Uma* ***subsequência*** *de (x_n) é uma restrição da aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$ a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$.*

Notações: $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Definição 2.7. ***(Conjunto limitado)*** *Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico M. Suponhamos que exista $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $d(x, y) < k$, para quaisquer $x, y \in A$. Nestas condições dizemos que A é um* ***conjunto limitado****.*

Definição 2.8. ***(Sequência limitada)*** *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se* ***limitada*** *quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, $x(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado.*

Definição 2.9. ***(Sequência convergente)*** *Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é* ***limite*** *da sequência (x_n) quando, para todo número $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Notações: $a = \lim x_n$, $\;a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\;a = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\;x_n \to a$

Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (M, d)$ é dita **convergente** se existe um $a \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0.$$

Proposição 2.1. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente, digamos que $\lim x_n = a$, ou seja dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Assim,

$$n > n_0 \Longrightarrow x_n \in B(a, \epsilon).$$

Logo, os termos da sequência pertencem ao conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\} \cup B(a, \epsilon)$ que é limitado. Portanto, (x_n) é uma sequência limitada. ■

Proposição 2.2. *Seja (x_n) uma sequência de números reais, com $\lim x_n = a > b$. Então $x_n > b$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração: Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon.$$

Tomando $\epsilon = a - b > 0$, obtemos

$$n > n_0 \Longrightarrow x_n > b.$$

■

Corolário 2.1. ***(Conservação do sinal)*** *Seja (x_n) uma sequência de números reais, com $\lim x_n = a > 0$. Então $x_n > 0$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração: Tomando $b = 0$, segue-se da Proposição 2.2 o resultado. ■

Definição 2.10. ***(Sequência de Cauchy)*** *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é chamada* ***sequência de Cauchy*** *se, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice r tal que:*

$$m, n \geq r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Exemplo 2.3. *A sequência $(x_n) = \frac{1}{n}$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}$.*

Solução: De fato, dado $\epsilon > 0$, pela propriedade arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0\epsilon > 2$, e pela desigualdade triangular, obtemos:

$$m, n > n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

mas,

$$m > n_0 \Longrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} \quad e \quad n > n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}.$$

Logo,

$$m, n > n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Proposição 2.3. *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = a$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, pela desigualdade triangular, obtemos:

$$m, n > n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) = d(x_m, a) + d(x_n, a) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. ■

Definição 2.11. *(**Espaço Métrico Completo**) Um espaço métrico M é chamado **Completo** se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M.*

Exemplo 2.4. *A reta é um espaço métrico completo, ou seja toda sequência de Cauchy de números reais é convergente em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 2.5. *O subespaço métrico $S = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ não é completo, pois, a sequência $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em S, mas $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ não converge em S.*

2.2 Topologia dos Espaços Métricos

Nesta seção usamos a referências [2] e [4] para estudarmos alguns conceitos relativos a topologia dos espaços métricos.

Definição 2.12. *(**Conjunto Aberto**) Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz **aberto** se, para todo $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$*

Exemplo 2.6. *(**Bola Aberta**) Toda bola aberta $B(p, r)$ num espaço M é um conjunto aberto.*

Solução: Seja $x \in B(p, r)$. Então $d(p, x) < r$ e portanto $s = r - d(p, x)$ é um número positivo. Afirmamos que $B(x, s) \subset B(p, r)$. De fato, se $y \in B(x, s)$, então $d(x, y) < s$ e portanto $d(p, y) \leq d(p, x) + d(x, y) < d(p, x) + r - d(p, x) = r$. Logo $y \in B(p, r)$

Proposição 2.4. *Seja $\mathcal{A}$ a coleção dos abertos de um espaço métrico (M, d). Então:*

i) $\varnothing$, $M \in \mathcal{A}$;

ii) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$;

iii) Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de M, ou seja, se cada $A_i \in \mathcal{A}$, então $\cup A_i \in \mathcal{A}$.

Demonstração: De fato, pois:

i) É claro que $\varnothing$ é aberto, pelo fato de não conter pontos e, portanto, de não poder contrariar a definição dada. Quanto a M, toda bola de centro num ponto $p \in M$ é um subconjunto de M, por definição.

ii) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p,\epsilon) \subset A$ e $B(p,\lambda) \subset B$. Supondo $\epsilon \leq \lambda$ temos que

$$B(p,\epsilon) \subset B(p,\lambda)$$

donde $B(p,\epsilon) \subset A \cap B$.

iii) Seja $p \in \cup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um certo $\epsilon > 0$ vale a relação $B(p,\epsilon) \subset A_t$. Então $B(p,\epsilon) \subset \cup A_i$. ∎

Definição 2.13. ***(Ponto interior)*** *Seja (M,d) um espaço métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado* ***ponto interior*** *ao conjunto A se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p,\epsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores a A é chamado* ***interior*** *de A e é indicado por $\overset{o}{A}$.*

Definição 2.14. ***(Conjunto Fechado)*** *Seja (M,d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz* ***fechado*** *se F^c é aberto.*

Exemplo 2.7. ***(Subconjunto finito)*** *Num espaço métrico (M,d) qualquer subconjunto finito $F = \{a_1, ..., a_n\} \subset M$ é fechado.*

Solução: Seja $p \in F^c$ e tomemos $\epsilon > 0$ de maneira que $\epsilon < \min\{d(p,a_i) : a_i \in F\}$ e mostremos que $B(p,\epsilon) \subset F^c$ ou, o que é equivalente, que $B(p,\epsilon) \cap F = \varnothing$. Mas isto é simples: se algum a_i pertencesse à bola $B(p,\epsilon)$, então $d(a_i,p) < \epsilon$, o que é impossível, dada a escolha que fizemos de ϵ.

Proposição 2.5. *Seja $\mathcal{F}$ a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:*

i) $\varnothing$*,* $M \in \mathcal{F}$*;*

ii) $H, F \in \mathcal{F} \Longrightarrow H \cup F \in \mathcal{F}$*;*

iii) Se (F_i) é uma família de conjuntos fechados de M, então $\cap F_i \in \mathcal{F}$.

Demonstração: De fato, pois:

i) $\varnothing$ e M pertencem a $\mathcal{F}$ pois $\varnothing^c = M$ e $M^c = \varnothing$ pertencem a $\mathcal{F}$ (coleção dos abertos de M).

ii) Se $H, F \in \mathcal{F}$, então H^c e F^c são abertos, donde a interseção de H^c e F^c é aberta. Assim $(H^c \cap F^c)^c = (H^c)^c \cup (F^c)^c = H \cup F \in \mathcal{F}$.

iii) Como cada F_i é fechado, então cada F_i^c é aberto e, portanto, $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$ é aberto. consequentemente $\cap F_i$ é fechado. ■

Definição 2.15. *(**Ponto aderente**) Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $p \in M$ se diz **ponto aderente** ao conjunto A se, para todo $\epsilon > 0$, vale a relação*

$$B(p, \epsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se fecho de A e é indicado por $\overline{A}$.

Proposição 2.6. *Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e se p é um ponto de $\overline{A}$, então existe uma sequência (x_n) de pontos de A tal que $\lim x_n = p$.*

Demonstração: Como $p \in \overline{A}$, então cada uma das bolas abertas $B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, contêm pontos de A. A sequência (x_n), onde $x_n \in A \cap B\left(p, \frac{1}{n}\right)$, para todo $n \geq 1$, converge para p. De fato, toda bola $B(p, \epsilon)$ contém $B\left(p, \frac{1}{r}\right)$ desde que $\frac{1}{r} < \epsilon$, e portanto, nestas condições, contém x_r, x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots$. Como (x_n) é uma sequência de pontos de A então

$$|x_n - p| = \left|\frac{1}{r}\right| = \frac{1}{r} < \epsilon,$$

ou seja

$$x_n \to p.$$

■

Definição 2.16. *(**Subconjunto denso**) Dado um espaço métrico (M, d), um subconjunto $A \subset M$ se diz **denso** em M se $\overline{A} = M$.*

A definição acima significa, em outros termos, que, para todo $p \in M$ e todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ de maneira que $d(a, p) < \epsilon$. Intuitivamente, para cada ponto $p \in M$ existe, arbitrariamente "próximo" de p, um ponto $a \in A$.

Definição 2.17. *(**Ponto de acumulação**) Seja (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Diz-se que um ponto $p \in M$ é um **ponto de acumulação** de A quando para todo $\epsilon > 0$, a interseção*

$$(B(p, \epsilon) - \{p\}) \cap A$$

é um conjunto infinito. Isto quer dizer que toda bola de centro p deve conter infinitos pontos de A, distintos do ponto p.

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado conjunto derivado de A e se indica por A'.

Proposição 2.7. *Seja M um espaço métrico. Então, $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponhamos que exista $p \in F'$ tal que $p \notin F$. Então $p \in F^c$, que é aberto, e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset F^c$, isto é, $B(p, \epsilon) \cap F = \varnothing$. Mas como $p \in F'$ então $(B(p, \epsilon) - \{p\}) \cap F$ é infinito do que decorre que $B(p, \epsilon) \cap F$ também é infinito e portanto não vazio. Este absurdo vem garantir a validade desta implicação.
($\Longleftarrow$) Seja $p \in F^c$. Como $F' \subset F$, então $F^c \subset (F')^c$ e daí $p \in (F')^c$. Donde existe $\epsilon > 0$ de maneira que

$$(B(p, \epsilon) - \{p\}) \cap F = \varnothing.$$

Mas $p \notin F$ e daí vamos ter também a igualdade $B(p, \epsilon) \cap F = \varnothing$ que equivale a $B(p, \epsilon) \subset F^c$ o que nos garante que todos os pontos de F^c são interiores, ou seja, que F^c é aberto. Donde F é fechado. ■

Definição 2.18. *(**Função Contínua**) Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ se diz **contínua** no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que:*

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Dizer que f é contínua, significa que f é contínua em todos os pontos de M.

Proposição 2.8. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ seja contínua no ponto $p \in M$ é necessário e suficiente que $x_n \to p$ em M implique $f(x_n) \to f(p)$ em N.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Seja f contínua no ponto p. Se $x_n \to p$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

A partir de δ, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x_n), f(p)) < \epsilon.$$

Logo

$$f(x_n) \to f(p).$$

($\Longleftarrow$) Suponhamos, por absurdo, que f não seja contínua no ponto p. Então existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, nós podemos obter $x_n \in M$, com

$$d(x_n, p) < \frac{1}{n} \ \text{ e } \ d(f(x_n), f(p)) \geq \epsilon.$$

Isto nos dá uma sequência (x_n) em M, com $x_n \to a$ sem que $f(x_n)$ convirja para $f(p)$, ou seja, um absurdo. Logo

$$x \to p \Longrightarrow f(x) \to f(p).$$

∎

Proposição 2.9. ***(Conservação do sinal)*** *Sejam M um espaço métrico e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\lim_{x\to p} f(x) = f(p) \neq 0$, então existirá um $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para $d(x,p) < \delta$, e x pertencente ao domínio de f.*

Demonstração: Dado arbitrariamente um $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$d(x,p) < \delta \Longrightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$$

Temos duas possibilidades:

i) Se $f(p) > 0$, então tomamos $\epsilon = f(p) > 0$ donde teremos que $f(x) > 0$.

ii) Se $f(p) < 0$, então tomamos $\epsilon = -f(p) > 0$ donde teremos que $f(x) < 0$. ∎

Definição 2.19. ***(Imersão Isométrica)*** *Uma imersão isométrica é qualquer aplicação $f : M \to N$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

quaisquer que sejam $x, y \in M$. Isto significa que a aplicação preserva distância.

Exemplo 2.8. *Toda imersão isométrica é contínua.*

Demonstração: De fato, pois para qualquer $\epsilon > 0$ dado, tomando $\delta = \epsilon$ temos:

$$d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) = d(x,p) < \delta = \epsilon.$$

qualquer que seja $p \in M$. ∎

Proposição 2.10. *Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$ existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que*

$$f(B(p,\delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Note que, basta mostrar que dado um $y \in f(B(p,\delta))$ ele também pertença a $B(f(p), \epsilon)$. De fato, dado $y \in f(B(p,\delta))$, então existe um $x \in B(p,\delta)$ tal que, $f(x) = y$. Daí $d(x,p) < \delta$. Logo, pela continuidade de f temos que:

$$d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Logo, $f(x) \in B(f(p), \epsilon)$ e portanto

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

$(\Longleftarrow)$ Como por hipótese $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$ então, como $x \in B(p, \delta)$, temos

$$f(x) \in B(f(p), \epsilon) \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Logo, f é contínua em p.

∎

Observação 2.1. *No caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $p \in M$ significa dizer que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implicam $f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$. Ou seja, f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo abertos $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$.*

Definição 2.20. *(**Aplicação Lipschitziana**) Seja $f : M \longrightarrow N$, se existir uma constante $c > 0$ (a constante c é chamada **constante de Lipschitz**), tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y)$$

*quaisquer que sejam $x, y \in M$, dizemos que f é uma **aplicação Lipschitziana**.*

Exemplo 2.9. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = senx$ é uma função lipschitziana.*

Solução: De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$. Então, pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (x, y)$ tal que,

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Logo,

$$|seny - senx| = |cos(c)(y - x)| = |cos(c)||y - x| \leq 1.|y - x| = |y - x|$$

Portanto, f é uma função Lipschitziana.

Proposição 2.11. *Se $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação Lipschitziana, então f é contínua em M.*

Demonstração: De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$ e usando o fato que f é Lipschitziana, obtemos

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y) < c.\delta = c.\frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Logo, $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, e f é contínua. ∎

Definição 2.21. *(**Função Uniformemente Contínua**) Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \longrightarrow N$ se diz **uniformemente contínua** se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que:*

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Intuitivamente isso significa que estão "arbitrariamente próximos" entre si dois valores de f correspondentes a dois pontos de M "suficientemente próximos" entre si.

Exemplo 2.10. *As aplicações lipschitzianas $f : M \longrightarrow N$ são uniformemente contínuas.*

Solução: De fato, se $c > 0$ é a constante de Lipschitz de f, então $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$, $\forall x, y \in M$. Logo, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$ a definição se verifica.

2.3 Espaços Compactos

Nesta seção usamos as referências [2] e [4] para estudarmos o conceito de espaço compacto e algumas de suas principais propriedades.

Definição 2.22. *(**Cobertura**) Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma **cobertura** de X é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Isto significa que, para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.*

A cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ diz-se finita quando L é um conjunto finito. Neste caso, temos $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e escrevemos $X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$.

Definição 2.23. *(**Subcobertura**) Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda se pode obter $\lambda \in L'$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, então a subfamília $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ chama-se uma **subcobertura** de $\mathcal{C}$.*

Definição 2.24. *(**Cobertura aberta**) Uma cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ diz-se **aberta** quando cada conjunto A_λ, $\lambda \in L$, é aberto em M.*

Definição 2.25. *(**Espaço Compacto**) Um espaço métrico (M, d) chama-se **compacto** quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.*

Observação 2.2. *Se M é um espaço compacto, teremos que toda sequência em M possui uma subsequência que converge para um ponto em M. Usaremos este fato nas proposições abaixo. Uma demonstração desse resultado se encontra na referência [4].*

Proposição 2.12. *Se o espaço métrico M é compacto, então toda função contínua $f : M \longrightarrow N$ é uniformemente contínua.*

Demonstração: Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam $\epsilon > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, pontos x_n, $y_n \in M$ tais que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ e } d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon.$$

Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de M, que existe $\lim x_n = a \in M$ e também o $\lim y_n = a$. A continuidade de f e da distância nos dá

$$\lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(a), f(a)) = 0,$$

em contradição com $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ para todo n.

■

Proposição 2.13. *Sejam M e N espaços métricos e seja $f : M \longrightarrow N$ uma função contínua. Se $K \subset M$ é compacto, então $f(K)$ também é compacto.*

Demonstração: Seja $(y_1, y_2, \ldots)$ uma sequência de pontos de $f(K)$. Assim sendo existe, para cada índice i, um elemento $x_i \in K$ tal que $f(x_i) = y_i$. Como (x_i) é uma sequência de pontos de K, que é compacto, existe uma subsequência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots)$ dessa sequência tal que $\lim x_{i_r} = p \in K$. Sendo f contínua, então $\lim f(x_{i_r}) = f(p)$ e portanto a subsequência $(f(x_{i_r}))$ de (y_i) converge para $f(p) \in f(K)$. ■

Definição 2.26. *(**Topologia**) Seja E um conjunto não vazio. Uma coleção Γ de subconjuntos de E é chamada **topologia** sobre E se:*

$T_1)$ $\varnothing$, $E \in \Gamma$;

$T_2)$ Se $G_1, \ldots, G_n \in \Gamma (n \geq 1)$, então $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \Gamma$;

$T_3)$ Se (G_i) é uma família qualquer de conjuntos de Γ, então $\cup G_i \in \Gamma$.

Nessas condições dizemos que o par (E, Γ) é um espaço topológico; os membros da classe Γ são chamados conjuntos abertos do espaço e cada elemento de E é designado por ponto.

Exemplo 2.11. *Seja (M, d) um espaço métrico. A coleção dos conjuntos abertos desse espaço satisfaz os axiomas da definição de espaço topológico pois, como já vimos (Proposição 2.4):*

- $\varnothing$ e M são abertos.

- Se G e H são abertos, $G \cap H$ é aberto.

- Se (G_i) é uma família de conjuntos abertos de (M, d), então $\cup G_i$ é aberto.

Essa topologia é chamada topologia induzida pela métrica d sobre M.

Capítulo 3

Teoremas de Aproximações

Neste capítulo apresentamos os Teoremas de Aproximações de Weierstrass, seguindo as referências [7] e [10], e Stone-Weierstrass seguindo as referências [4], [5] e [8].

3.1 Teorema da Aproximação de Weierstrass

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Aproximação de Weierstrass seguindo as referências [7] e [10].

Agora vamos enunciar e demonstrar o Teorema de Aproximação de Weierstrass seguindo a referência [10].

Teorema 3.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe uma sequência (p_n) de polinômios que converge uniformemente para f em $[a, b]$.*

Demonstração: Primeiramente vamos resolver o problema para o caso em que $[a, b] = [0, 1]$ e $f(0) = f(1) = 0$. Como $[0, 1]$ é compacto temos que f é uniformemente contínua em $[0, 1]$. Neste caso podemos considerar a extensão de f a $\mathbb{R}$ como sendo nula fora de $[0, 1]$, a qual continuaremos a denotar por f, que, assim, é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$c_n = \left(\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, dx\right)^{-1} = \left(2\int_{0}^{1} (1 - x^2)^n \, dt\right)^{-1} = \left[2 \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}\right]^{-1} = \left[\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n + 1)!}\right]^{-1}.$$

Consideremos, agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ o polinômio $q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$ tal que

$$\int_{-1}^{1} q_n(x) \, dx = \int_{-1}^{1} c_n(1 - x^2)^n \, dx = c_n \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, dx = c_n \cdot c_n^{-1} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx &= 2\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \\
&\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n\,dx \\
&\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)\,dx \\
&= 2\left(x-n\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\
&> \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Donde segue que $0 < c_n < \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando que para cada δ tal que $0 < \delta \leq 1$ temos, para $0 < \delta \leq |x| \leq 1$,

$$q_n(x) = c_n(1-x^2)^n \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n,$$

ou seja,

$$q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n.$$

E considerando que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(1-\delta^2)^n$$

é convergente (pelo Teste da Razão[1]) segue-se, usando o Critério de Weierstrass[2], que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$$

também converge. Daí temos que $q_n \to 0$ uniformemente em $\delta \leq |x| \leq 1$.

Definamos agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função p_n de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)q_n(t)\,dt.$$

Como f é nula fora de $[0,1]$ então

$$p_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t)\,dt.$$

---

[1] Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos e suponhamos que $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$. Então a série é absolutamente convergente caso $L < 1$.

[2] Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções em S tais que $|f_n(x)| \leq b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente. Então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente (e absolutamente) em S.

Fazendo a mudança de variável $s = x + t$ obtemos

$$p_n(x) = \int_0^1 f(s) q_n(s - x)\, ds.$$

Desde que q_n é um polinômio, segue que p_n é um polinômio.

Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta$ implique que

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

e escolhemos um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n < \frac{\epsilon}{8M}$$

para todo $n > N$, onde $M = \sup\{|f(x)| : -1 \leq x \leq 1\}$. Daí, usando o fato de que $q_n(x) \geq 0$, para $0 \leq x \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
|p_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 f(x+t) q_n(t)\, dt - \int_{-1}^1 f(x) q_n(t)\, dt \right| \\
&= \left| \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)] q_n(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| q_n(t)\, dt \\
&= \int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| q_n(t)\, dt + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| q_n(t)\, dt + \\
&\quad + \int_{\delta}^1 |f(x+t) - f(x)| q_n(t)\, dt \\
&\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} q_n(t)\, dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)\, dt + 2M \int_{\delta}^1 q_n(t)\, dt \\
&\leq 4M\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2} \\
&< 4M \frac{\epsilon}{8M} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $n > N$ e para todo $x \in [0, 1]$.

Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e não necessariamente satisfaz à condição $f(0) = f(1) = 0$, podemos considerar a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$, que é contínua e, agora, satisfaz à condição $g(0) = g(1) = 0$. Pelo que já demonstramos, g pode ser uniformemente aproximada por polinômios e, portanto, vale o mesmo para f.

Finalmente se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, consideremos $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f(a + t(b - a)).$$

Pelo que já vimos existe uma sequência (q_n) de polinômios tal que $q_n \to g$ uniformemente em $[0,1]$. Dado $x \in [a,b]$ seja

$$t = \frac{x-a}{b-a} \in [0,1].$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} q_n(t) = g(t) = f\left(a + \frac{x-a}{b-a}(b-a)\right) = f(x),$$

isto é, $q_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$, ficando, assim, demonstrado o teorema. ■

Para demonstrar o Teorema de Aproximação de Weierstrass seguindo a referência [7], que generaliza o Teorema 3.1, vamos precisar de algumas definições e resultados.

Definição 3.1. *Uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é convexa se para cada par $x, y \in (a,b)$ e todo $t \in [0,1]$,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Definição 3.2. *Uma função f é côncava se $-f$ é convexa.*

Proposição 3.1. *Seja $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então a função*

$$y \longrightarrow F(x;y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, \quad x, y \in (a,b), x \neq y,$$

é não decrescente.

Demonstração: Assumimos que $y > x$. É suficiente mostrar que $F(x;z) \leq F(x;y)$ para $z = tx + (1-t)y$ para todo $t \in (0,1)$. Pela convexidade de f, temos que

$$\begin{aligned}
F(x;z) &= \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \\
&= \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \\
&= \frac{f(tx+(1-t)y)-f(x)}{tx+(1-t)y-x} \\
&= \frac{f(tx+(1-t)y)-f(x)}{(1-t)(y-x)} \\
&\leq \frac{tf(x)+(1-t)f(y)-f(x)}{(1-t)(y-x)} \\
&= \frac{(1-t)[f(y)-f(x)]}{(1-t)(y-x)} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = F(x;y).
\end{aligned}$$

A prova para $y < x$ é análoga. ■

Definição 3.3. *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o módulo de continuidade de f como sendo*

$$\omega_f(s) = \sup_{\substack{|x-y|<s \\ x,y\in E}} |f(x) - f(y)|, \quad s > 0.$$

A função $s \to \omega_f(s)$ é não negativa e não decrescente em $[0,\infty)$. Também assumimos que $\omega_f(\cdot)$ é dominada em $[0,\infty)$ por alguma função afim crescente, isto é,

$$\omega_f(s) \leq as + b, \quad \forall s \in [0,\infty) \ \text{ e para alguns } \ a, b \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Definição 3.4. *Definimos por $s \to c_f(s)$ o módulo côncavo de continuidade de f, isto é, a menor função côncava em $[0,\infty)$ cujo gráfico encontra-se acima do gráfico de $s \to \omega_f(s)$. Tal função pode ser construída como sendo,*

$$c_f(s) = \inf\{l(s) : l \text{ é uma função afim e } l \geq \omega_f \text{ em } [0,\infty)\}.$$

Segue-se da definição que

$$c_f(|x-y|) - |f(x) - f(y)| \geq 0 \quad \forall x, y \in E. \tag{3.2}$$

Lema 3.1. *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua com módulo de continuidade satisfazendo (3.1). Então existe uma função contínua $\tilde{f}$ definida em $\mathbb{R}^n$ que coincide com f em E. Além disso, f e $\tilde{f}$ têm o mesmo módulo côncavo de continuidade c_f, e*

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} = \sup_E f \quad \text{e} \quad \inf_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} = \inf_E f.$$

Demonstração: Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, montamos

$$g(x) = \inf_{y\in E}\{f(y) + c_f(|x-y|)\}.$$

A requerida extensão é

$$\tilde{f}(x) = \min\left\{g(x), \sup_E f\right\}.$$

Se $x \in E$, por (3.2),

$$f(y) + c_f(|x-y|) \geq f(x) + c_f(|x-y|) - |f(x) - f(y)| \geq f(x)$$

para todo $y \in E$. Portanto, $g = f$ em E. Agora, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $y \in E$,

$$\inf_E f + \inf_{y\in E} c_f(|x-y|) \leq \inf_{y\in E}\{f(y) + c_f(|x-y|)\} = g(x) \leq f(y) + c_f(|x-y|).$$

Portanto,

$$\inf_{\mathbb{R}^n} g = \inf_E f \quad e \quad \sup_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} = \sup_E f.$$

Para provar que f e $\tilde{f}$ tem o mesmo módulo côncavo de continuidade, é suficiente provar que g têm o mesmo módulo de continuidade de f. Fixe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$. Então existe $y \in E$ tal que

$$g(x_1) \geq f(y) + c_f(|x_1 - y|) - \epsilon$$

e

$$g(x_2) \geq f(y) + c_f(|x_2 - y|) - \epsilon$$

Portanto, para cada $y \in E$,

$$g(x_1) - g(x_2) \geq c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y|) - \epsilon.$$

Se $|x_2 - y| \leq |x_1 - x_2|$, então

$$g(x_1) - g(x_2) \geq -c_f(|x_1 - x_2|) - \epsilon.$$

Por outro lado,

$$|x_1 - y| > |x_2 - y| - |x_1 - x_2| > 0.$$

Visto que $s \to c_f(s)$ é côncava, $-c_f(\cdot)$ é convexa, e pela Proposição 3.1,

$$\begin{aligned}
\frac{c_f(|x_1 - y|) - c_f(0)}{|x_1 - y|} &\geq \frac{c_f(|x_1 - y| + |x_2 - x_1|) - c_f(|x_1 - x_2|)}{|x_1 - y| + |x_2 - x_1| - |x_1 - x_2|} \\
&\geq \frac{c_f(|x_2 - y|) - c_f(|x_1 - x_2|)}{|x_1 - y|}.
\end{aligned}$$

A partir disto, e tendo em conta que $c_f(0) = 0$, obtemos que

$$c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y|) \geq -c_f(|x_1 - x_2|).$$

Assim em ambos os casos,

$$g(x_1) - g(x_2) \geq -c_f(|x_1 - x_2|) - \epsilon.$$

Trocando os papéis de x_1 e x_2 e tendo em conta que $\epsilon > 0$ foi dado arbitrariamente, segue-se que

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq c_f(|x_1 - x_2|).$$

■

Teorema 3.2. ***(Teorema da Aproximação de Weierstrass)*** *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua definida em um conjunto limitado E. Então, existe uma sequência de polinômios (P_j) tal que*

$$\sup_E |f - P_j| \longrightarrow 0 \quad \textit{conforme} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Demonstração: Pelo Lema 3.1, podemos considerar f (neste caso continuaremos a denotar a extensão por f) definida em todo o $\mathbb{R}^n$ com módulo de continuidade ω_f. Após uma translação e dilatação, assumimos que E está contido no interior de um cubo unitário Q centrado na origem de $\mathbb{R}^n$ e com faces paralelas aos planos coordenados.

Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, $Q_\delta(x)$ denota o cubo de borda 2δ centrado em x e congruente a Q. Para $j \in \mathbb{N}$, montamos

$$p_j(x) = \frac{1}{\alpha_j^n} \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i^2)^j, \quad \alpha_j = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^j \, dt.$$

Agora note que

$$\alpha_j = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^j \, dt = 2 \int_{0}^{1} (1 - t^2)^j \, dt = 2 \cdot \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!} = \frac{2^{2j+1}(j!)^2}{(2j+1)!}.$$

Estes são polinômios de grau $2jn$ satisfazendo

$$\int_{Q_1(x)} p_j(x - y) \, dy = \int_Q p_j(y) \, dy = 1 \tag{3.3}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Pois note que para $n = 1$ temos que

$$\int_Q p_j(y) \, dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\alpha_j} (1 - y^2)^j \, dy = \frac{1}{\alpha_j} \int_{-1}^{1} (1 - y^2)^j \, dy = \frac{1}{\alpha_j} \cdot \alpha_j = 1.$$

Vamos supor que para $n \in \mathbb{N}$ (fixado) seja válida a equação 3.3, e mostremos que vale para $n + 1 \in \mathbb{N}$. De fato

$$\begin{aligned}
\int_Q p_j(y) \, dy &= \int_Q \frac{1}{\alpha_j^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} (1 - y_i^2)^j \, dy_i \\
&= \iint_Q \frac{1}{\alpha_j} \frac{1}{\alpha_j^n} \prod_{i=1}^{n} (1 - y_i^2)^j \, dy_i (1 - y_{n+1}^2)^j \, dy_{n+1} \\
&= \frac{1}{\alpha_j} \int_Q \left[\int_Q \frac{1}{\alpha_j^n} \prod_{i=1}^{n} (1 - y_i^2)^j \, dy_i \right] (1 - y_{n+1}^2)^j \, dy_{n+1} \\
&= \frac{1}{\alpha_j} \int_Q (1 - y_{n+1}^2)^j \, dy_{n+1} \\
&= \frac{1}{\alpha_j} \cdot \alpha_j \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Os polinômios de aproximação requeridos no teorema são

$$P_j(x) = \int_Q f(y)p_j(x-y)dy.$$

Estes são chamados polinômios de Stieltjes relativos a f. Para $x \in E$, calculamos

$$\begin{aligned} P_j(x) - f(x) &= P_j(x) - f(x)\cdot 1 \\ &= \int_Q f(y)p_j(x-y)dy - f(x)\int_Q p_j(y)\,dy \\ &= \int_Q f(y)p_j(x-y)dy - f(x)\int_{Q_1(x)} p_j(x-y)\,dy \\ &= \int_Q f(y)p_j(x-y)dy - \int_{Q_1(x)} f(x)p_j(x-y)\,dy. \end{aligned}$$

Agora seja $\delta > 0$ tal que $Q_\delta(x) \subset Q$. Então

$$\begin{aligned} |P_j(x) - f(x)| &= \left|\int_Q f(y)p_j(x-y)dy - \int_{Q_1(x)} f(x)p_j(x-y)\,dy\right| \\ &= \left|\int_{Q_\delta(x)} f(y)p_j(x-y)dy + \int_{Q-Q_\delta(x)} f(y)p_j(x-y)dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_{Q_\delta(x)} f(x)p_j(x-y)\,dy - \int_{Q_1(x)-Q_\delta(x)} f(x)p_j(x-y)\,dy\right| \\ &= \left|\int_{Q_\delta(x)} f(y)p_j(x-y)dy - \int_{Q_\delta(x)} f(x)p_j(x-y)\,dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q-Q_\delta(x)} f(y)p_j(x-y)dy - \int_{Q_1(x)-Q_\delta(x)} f(x)p_j(x-y)\,dy\right| \\ &= \left|\int_{Q_\delta(x)} [f(y)-f(x)]p_j(x-y)\,dy + \int_{Q-Q_\delta(x)} f(y)p_j(x-y)\,dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q_1(x)-Q_\delta(x)} f(x)p_j(x-y)\,dy\right| \\ &\leq \int_{Q_\delta(x)} |f(x)-f(y)|p_j(x-y)\,dy + \left|\int_{Q-Q_\delta(x)} f(y)p_j(x-y)\,dy\right| + \\ &\quad + \left|\int_{Q_1(x)-Q_\delta(x)} f(x)p_j(x-y)\,dy\right| \\ &\leq \omega_f(\sqrt{n}\delta) + \sup_E |f| \int_{Q-Q_\delta(x)} p_j(x-y)\,dy + \sup_E |f| \int_{Q_1(x)-Q_\delta(x)} p_j(x-y)\,dy. \end{aligned}$$

Para estimar as duas últimas integrais, observemos que para $y \notin Q_\delta(x)$,

$$\begin{aligned} p_j(x-y) &= \frac{1}{\alpha_j^n}\prod_{i=1}^n [1-(x-y)_i^2]^j \\ &= \alpha_j^{-n}\prod_{i=1}^n [1-(x-y)_i^2]^j \\ &\leq \alpha_j^{-n}(1-\delta^2)^{jn}. \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned}
\alpha_j = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^j \, dt &= 2\int_0^1 (1-t^2)^j \, dt \\
&\geq 2\int_0^1 (1-t)^j \, dt \\
&= 2\left[-\frac{(1-t)^{j+1}}{j+1}\Big|_0^1 \right] \\
&= \frac{2}{j+1}.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\alpha_j \geq \frac{2}{j+1} > 0 \;\; &\Rightarrow \;\; \frac{1}{\alpha_j} \leq \frac{j+1}{2} \\
&\Rightarrow \;\; \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^n \leq \left(\frac{j+1}{2}\right)^n \\
&\Rightarrow \;\; \alpha_j^{-n} \leq \left(\frac{j+1}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Combinando estes cálculos, estimamos

$$\begin{aligned}
\sup_E |f - P_j| &\leq \omega_f(\sqrt{n}\delta) + \sup_E |f| \left(\frac{j+1}{2}\right)^n (1-\delta^2)^{jn} + \sup_E |f| \left(\frac{j+1}{2}\right)^n (1-\delta^2)^{jn} \\
&\leq \omega_f(\sqrt{n}\delta) + 2\sup_E |f| \left(\frac{j+1}{2}\right)^n (1-\delta^2)^{jn}
\end{aligned}$$

Quando j for suficientemente grande segue-se o resultado. ■

3.2 Teorema de Stone-Weierstrass

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o teorema de Stone-Weierstrass no caso real e no caso complexo. Seguiremos as referências [4], [5] e [8].

3.2.1 Teorema de Stone-Weierstrass caso Real

Nesta subseção enunciaremos e demonstraremos o teorema de Stone-Weierstrass para o caso real.

Definição 3.5. *(**Espaço de Hausdorff**) Um espaço topológico X é dito um **espaço de Hausdorff** se para todo $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem abertos $U, V \subset X$ com $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Definição 3.6. *(**Álgebra**) Seja B um subconjunto não-vazio de $C(X,\mathbb{R})$, o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$. Dizemos que B é uma **álgebra** se B for um espaço vetorial que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $f+g \in B$ *sempre que* $f,g \in B$;

(ii) $f \cdot g \in B$ *sempre que* $f,g \in B$;

(iii) $\alpha f \in B$ *sempre que* $f \in B$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 3.7. *(**Subálgebra**) Dizemos que $A \subset C(X,\mathbb{R})$ é uma **subálgebra** se A for um subespaço vetorial que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $f+g \in A$ *sempre que* $f,g \in A$;

(ii) $f \cdot g \in A$ *sempre que* $f,g \in A$;

(iii) $\alpha f \in A$ *sempre que* $f \in A$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 3.8. *(**Métrica da convergência uniforme**) Seja $X \neq \varnothing$ um espaço compacto. Definiremos agora uma métrica em $C(X,\mathbb{R})$ pondo, para $f,g \in C(X,\mathbb{R})$ arbitrárias*

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

ou podemos escrever

$$\|f-g\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

*Tal métrica é chamada de "**Métrica da convergência uniforme** ou **métrica do sup**".*

Lema 3.2. *Seja $B \subseteq C(X,\mathbb{R})$ e X um espaço de Hausdorff compacto. Se B é uma álgebra, então $\overline{B}$ é uma álgebra.*

Demonstração: Sejam $f,g \in \overline{B}$. Tome $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$, tais que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ e $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$. Então:
$B \ni f_n + g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f+g$.
$B \ni f_n \cdot g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f\cdot g$.
$B \ni \alpha f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \alpha f$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Logo, $f+g$, $f\cdot g$ e $\alpha f \in \overline{B}$. ■

Lema 3.3. *Seja $B \subseteq C(X,\mathbb{R})$ uma álgebra e X um espaço de Hausdorff compacto. Se $f \in \overline{B}$, então $|f| \in \overline{B}$.*

Demonstração: Seja f uma aplicação pertencente a $C(X,\mathbb{R})$. Como X é compacto existe um intervalo $[a,b]$ tal que $f(X) \subset [a,b]$.

Considere a função

$$\begin{array}{rccc} g: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & |t|. \end{array}$$

Note que $g \in C([a,b],\mathbb{R})$ pelo fato de $t \mapsto t$ ser contínua e o módulo de uma aplicação contínua é contínua. Dado $\epsilon > 0$, tome um polinômio (o Teorema 3.2 garante a sua existência) tal que

$$\|p - g\|_\infty < \epsilon,$$

ou seja,

$$\sup_{t\in[a,b]} |p(t) - g(t)| < \epsilon.$$

Daí,

$$|p(t) - g(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [a,b].$$

Usando o fato que $f(X) \subset [a,b]$ obtemos

$$|p(f(x)) - |f(x)|| = |(p\circ f)(x) - |f(x)|| < \epsilon, \forall x \in X.$$

Daí,

$$\|p\circ f - |f|\|_\infty = \sup_{x\in X} |(p\circ f)(x) - |f(x)|| \le \epsilon. \tag{3.4}$$

Observe agora que $p \circ f \in \overline{B}$. Com efeito, pois p é da seguinte forma

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$$

pelo fato de ser um polinômio. Fazendo agora a composição de p com f resulta que

$$(p\circ f)(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (f(x))^i.$$

Por hipótese $f \in \overline{B}$, e como $\overline{B}$ é uma álgebra segue-se então que a composição $p\circ f \in \overline{B}$. A partir disso e de (3.4) concluímos que $|f| \in \overline{B}$. ■

Definição 3.9. *Sejam f e g funções em $C(X,\mathbb{R})$. Então, $f \vee g$ e $f \wedge g$ são definidas por:*

$$(f\vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad e \quad (f\wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Lema 3.4. *Seja $B \subseteq C(X,\mathbb{R})$ uma álgebra e X um espaço de Hausdorff compacto. Se f, $g \in \overline{B}$, então $f \vee g$ e $f \wedge g$ pertencem a $\overline{B}$.*

Demonstração: Note que

$$f \vee g = \frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \text{e} \quad f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Pelos Lemas 3.2 e 3.3 segue o resultado. ■

Teorema 3.3. ***(Teorema de Stone-Weierstrass caso Real)*** *Seja X um espaço de Hausdorff compacto e considere $C(X,\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$. Seja $B \subseteq C(X,\mathbb{R})$ com as seguintes propriedades:*

(i) B é uma álgebra;

(ii) As funções constantes estão contidas em B;

(iii) B separa pontos, isto é, dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, então existe $g \in B$ tal que $g(x) \neq g(y)$.

Neste caso, B é denso em $C(X,\mathbb{R})$, isto é, $\overline{B} = C(X,\mathbb{R})$.

Demonstração: Fixemos uma aplicação h pertencente a $C(X,\mathbb{R})$ e tomemos um $\epsilon > 0$. Vamos construir uma aplicação f que pertence a B tal que

$$\|f-h\|_\infty < \epsilon.$$

Dados $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 \neq x_2$, tome $g \in B$ tal que $g(x_1) \neq g(x_2)$. Definimos $f_{x_1x_2} = \alpha g + \beta$ onde

$$\alpha = \frac{h(x_1)-h(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{h(x_2)g(x_1)-h(x_1)g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
f_{x_1x_2}(x_1) = \alpha g(x_1)+\beta &= \frac{h(x_1)-h(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \cdot g(x_1) + \frac{h(x_2)g(x_1)-h(x_1)g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \\
&= \frac{h(x_1)g(x_1)-h(x_2)g(x_1)+h(x_2)g(x_1)-h(x_1)g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \\
&= \frac{h(x_1)g(x_1)-h(x_1)g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \\
&= \frac{h(x_1)[g(x_1)-g(x_2)]}{g(x_1)-g(x_2)} \\
&= h(x_1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
f_{x_1x_2}(x_2) &= \alpha g(x_2)+\beta &= \frac{h(x_1)-h(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}\cdot g(x_2)+\frac{h(x_2)g(x_1)-h(x_1)g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}\\
&&= \frac{h(x_1)g(x_2)-h(x_2)g(x_2)+h(x_2)g(x_1)-h(x_1)g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}\\
&&= \frac{h(x_2)g(x_1)-h(x_2)g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}\\
&&= \frac{h(x_2)[g(x_1)-g(x_2)]}{g(x_1)-g(x_2)}\\
&&= h(x_2).
\end{aligned}$$

Do argumento feito acima concluímos que dados pontos $u, v \in X$, existe $f_{uv} \in B$ tal que $f_{uv}(u) = h(u)$ e $f_{uv}(v) = h(v)$.

Fixe $\epsilon > 0$ e $x \in X$. Para cada $y \in X$, $x \neq y$, considere f_{xy} como acima, $f_{xy} \in B$, ou seja, $f_{xy} \in B$, $f_{xy}(x) = h(x)$ e $f_{xy}(y) = h(y)$.

Note que dado $y \in X$, f_{xy} é contínua, então (pela conservação do sinal na vizinhança) existe um aberto $V(y)$ tal que

$$f_{xy}(z) \geq h(z) - \epsilon, \quad \forall z \in V(y).$$

Tome $y_1, \ldots, y_n$ tal que $V(y_1) \cup \cdots \cup V(y_n)$ é uma cobertura para o conjunto X e defina

$$f_x = f_{xy_1} \vee f_{xy_2} \vee \cdots \vee f_{xy_n}.$$

Segue-se pelo Lema 3.4 que $f_x \in B$. Além disso, dado $z \in X$ temos que $f_x(z) \geq h(z) - \epsilon$. Usando o mesmo argumento, existe um aberto $V(x)$ tal que

$$f_x(z) \leq h(z) + \epsilon, \; \forall z \in V(x).$$

Para cada $x \in X$, considere f_x e $x \in V(x)$ como antes. Tome $x_1, \ldots, x_n$ tal que $V(x_1) \cup V(x_2) \cup \cdots \cup V(x_m)$ é uma cobertura para X. Defina

$$f = f_{x_1} \wedge f_{x_2} \wedge \cdots \wedge f_{x_m},$$

segue-se pelo Lema 3.4 que $f \in B$.

Note que $\forall z \in X$, $f(z) \geq h(z) - \epsilon$. Além disso, se $z \in X$, então $z \in V(x_i)$, para algum $i = 1, \ldots, m$, e portanto, $f_{x_i}(z) \leq h(z) + \epsilon$ e logo $f(z) \leq h(z) + \epsilon$.

Portanto, para todo z pertencente a X, temos

$$f(z) \geq h(z) - \epsilon$$

e

$$f(z) \leq h(z) + \epsilon.$$

Logo

$$\|f - z\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

■

3.2.2 Teorema de Stone-Weierstrass caso Complexo

Nesta subseção enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Stone-Weierstrass para o caso complexo.

Definição 3.10. *(**Álgebra Auto-adjunta**) Seja B um subconjunto não-vazio de $C(X, \mathbb{C})$, o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$. Dizemos que B é uma **álgebra auto-adjunta** se para cada $f \in B$ temos que $|f| \in B$.*

Teorema 3.4. *(**Teorema de Stone-Weierstrass caso Complexo**) Seja X um espaço de Hausdorff compacto e considere $C(X, \mathbb{C})$ o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$.*

Seja $B \subseteq C(X, \mathbb{C})$ com as seguintes propriedades:

(i) B é uma subálgebra auto-adjunta de $C(X, \mathbb{C})$;

(ii) As funções constantes estão contidas em B;

(iii) B separa pontos, isto é, dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, então existe $g \in B$ tal que $g(x) \neq g(y)$.

Então, B é denso em $C(X, \mathbb{C})$, isto é, $\overline{B} = C(X, \mathbb{C})$.

Demonstração: Seja R o conjunto das partes reais dos elementos $f \in B$, isto é

$$R := \{Re(f);\ f \in B\}.$$

Observe que R contém (e de fato é igual) as partes imaginárias de cada elemento de B. Isto pode ser visto, pois temos que $Re(if) = Im(-f)$ com $f \in B$, portanto $Re(B) = Im(B)$.

Podemos afirmar que $R \subset B$. Com efeito,

$$Re(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \in B$$

pois, B é uma álgebra auto-adjunta. Por outro lado, R é uma subálgebra de B. De fato, como B é uma álgebra, o produto de dois elementos $Re(f)$ e $Re(g)$ de R é um elemento de B. Mas uma vez que $Re(f) \cdot Re(g)$ são valores reais, o produto deve pertencer a R. O mesmo acontece com a soma e o produto por um escalar.

Note agora que R separa pontos pois, como B separa pontos, para cada $x \neq y \in X$ existe uma função $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Mas, isto implica que $Re(f(x)) \neq Re(f(y))$ ou $Im(f(x)) \neq Im(f(y))$, ou seja, existe uma função em R que separa pontos.

Note que R contém as funções constantes pois, tomando f sendo uma função constante por hipótese pertence a B, daí por definição f pertence a R. Podemos então, aplicar a versão real do Teorema de Stone-Weierstrass e concluir que cada função em X pode ser uniformemente aproximada por elementos de R.

Vejamos agora que B é denso em $C(X, \mathbb{C})$. Tome $f \in C(X, \mathbb{C})$. Pelo que acabamos de observar, ambas $Re(f)$ e $Im(f)$ são limites uniformes de sequências (g_n) e (h_n) de R. Então,

$$\|f - (g_n + ih_n)\|_\infty \leq \|Re(f) - g_n\|_\infty + \|Im(f) - h_n\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Como a sequência $(g_n + ih_n)$ está em B, portanto, B é denso em $C(X, \mathbb{C})$.

∎

Capítulo 4

Aplicações do Teorema de Aproximação de Weierstrass e de Stone-Weierstrass

Neste Capítulo aplicaremos o Teorema de Aproximação de Weierstrass e de Stone-Weierstrass em sequências de funções. Os problemas são encontrados nas referências [6] e [10].

Problema 4.1. *Mostre que para qualquer função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, existe uma função da forma*

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^{4k}$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$, onde $C_0, ..., C_n \in \mathbb{Q}$ e $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo x em [0,1].

Solução: Dado f e $\epsilon > 0$, seja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(\sqrt[4]{x})$. Pelo Teorema de Weierstrass, existe um polinômio P tal que

$$|P(x) - h(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

para $x \in [0,1]$, do qual resulta que

$$|P(x^4) - f(x)| = |P(x^4) - h(x^4)| < \frac{\epsilon}{2}$$

para $x \in [0,1]$.

Se o polinômio P é da forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

tomamos $C_0, \ldots, C_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k - C_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, temos que:

$$\begin{aligned}
|g(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} C_k x^{4k} - f(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} C_k x^{4k} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{4k} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^{4k} - f(x) \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{n} C_k x^{4k} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{4k} \right| + \left| \sum_{k=0}^{n} a_k x^{4k} - f(x) \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Problema 4.2. *Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continua. Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1).$$

Solução: Seja $p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ um polinômio. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n p(x) dx &= \lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 \sum_{j=0}^{k} a_j x^{n+j} \, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1) \sum_{j=0}^{k} a_j \int_0^1 x^{n+j} \, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1) \sum_{j=0}^{k} a_j \left(\left. \frac{x^{n+j+1}}{n+j+1} \right|_0^1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1) \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{1}{n+j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j \\
&= p(1).
\end{aligned}$$

De modo que o resultado segue-se para um polinômio. Agora seja f uma função contínua e $\epsilon > 0$. Pelo Teorema de Aproximação de Stone-Weierstrass, existe um polinômio p com

$\|f-p\|_\infty < \epsilon$. Assim

$$\begin{aligned}
& \left|(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx - f(1)\right| \\
= & \left|(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx - (n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx + (n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - f(1)\right| \\
= & \left|(n+1)\int_0^1 x^n [f(x)-p(x)]\,dx + (n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - f(1)\right| \\
\leq & \left|(n+1)\int_0^1 x^n [f(x)-p(x)]\,dx\right| + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - f(1)\right| \\
\leq & (n+1)\int_0^1 x^n |f(x)-p(x)|\,dx + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - f(1)\right| \\
\leq & (n+1)\int_0^1 x^n \epsilon\,dx + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - f(1)\right| \\
= & (n+1)\epsilon\int_0^1 x^n\,dx + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - f(1)\right| \\
= & (n+1)\epsilon\frac{1}{n+1} + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - f(1)\right| \\
= & \epsilon + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - p(1) + p(1) - f(1)\right| \\
\leq & \epsilon + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,dx - p(1)\right| + |p(1)-f(1)| \\
< & \epsilon+\epsilon+\epsilon \\
< & 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Uma vez que ϵ é arbitrário, segue-se o resultado desejado.

Problema 4.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$ para todo n inteiro não-negativo. Mostre que f é identicamente nula em $[a,b]$.*

Solução: Como f é contínua em $[a,b]$, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a,b].$$

Agora note que a funções $x \to x^n$ e f são contínuas. Daí podemos aproximar essas funções por uma sequência de polinômios (p_j), donde

$$|f(x)-x^n| = |f(x)-p_j(x)+p_j(x)-x^n| \leq |f(x)-p_j(x)| + |p_j(x)-x^n| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

conforme $j \to \infty$, ou seja,

$$|f(x)-x^n| < \epsilon.$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right| &= \left|\int_a^b [f(x)]^2\,dx - 0\right| \\
&= \left|\int_a^b [f(x)]^2\,dx - \int_a^b x^n f(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_a^b \{[f(x)]^2 - x^n f(x)\}\,dx\right| \\
&= \left|\int_a^b f(x)[f(x) - x^n]\,dx\right| \\
&\leq \int_a^b |f(x)||f(x) - x^n|\,dx \\
&< \int_a^b M\epsilon\,dx \\
&= M\epsilon \int_a^b dx \\
&= M\epsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2 = 0$. Como f é uma função contínua, segue que $f \cdot f$ (produto de duas funções) também é contínua e $[f(x)]^2 \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, daí $[f(x)]^2 = 0$ para todo $x \in [a,b]$. Logo $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Problema 4.4. *Mostrar que se f é um homeomorfismo*[1] *de [0,1] em si mesmo, então existe uma sequência p_n, n=1,2,3,... de polinômios tal que $p_n \to f$ uniformemente em [0,1] e cada p_n é um homeomorfismo de [0,1] em si mesmo.*
Sugestão: Assumimos que f é C^1.

Solução: Como f é um homeomorfismo de [0,1] em si mesmo, podemos assumir sem perda de generalidade (substituindo f por $1-f$) que f é estritamente crescente, com $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Primeiro trataremos o caso onde f' é uma função contínua. Pelo Teorema de Aproximação de Stone-Weierstrass, existe uma sequência de polinômios P_n que converge para f' uniformemente. Visto que $f' > 0$, podemos assumir (por adição de uma pequena constante) que cada um dos P_n é positivo. Além disso, uma vez que as $P_n's$ convergem uniformemente, temos que

$$\int_0^1 P_n(t)dt \to \int_0^1 f'(t)dt = f(1) = 1.$$

Definindo a_n por

$$a_n = \int_0^1 P_n(t)dt$$

[1]Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua.

podemos substituir cada P_n por a_nP_n, então podemos assumir que

$$\int_0^1 P_n(t)dt = 1.$$

Agora consideremos os polinômios

$$Q_n(x) = \int_0^x P_n(t)dt,$$

onde

$$Q_n(0) = \int_0^0 P_n(t)dt = 0,$$

$$Q_n(1) = \int_0^1 P_n(t)dt = 1,$$

e

$$Q_n'(x) = \left(\int_0^1 P_n(t)dt\right)' = P_n(x) > 0$$

para todo x e n.

Portanto, cada Q_n é um homeomorfismo do intervalo unitário sobre si mesmo, e por sua definição, $Q_n's$ converge para f uniformemente.

É agora suficiente mostrar que qualquer homeomorfismo crescente do intervalo unitário em si próprio, pode ser aproximada por um homeomorfismo de classe C^1.

Seja $r > 0$ e

$$f_r(x) = \begin{cases} e^{1-x^{-r}}, & se \quad x \in (0,1] \\ 0, & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Agora note que f_r' é C^1 em $[0,1]$, e

$$f_r'(x) = (e^{1-x^{-r}})' = (1-x^{-r})'e^{1-x^{-r}} = rx^{-r-1}e^{1-x^{-r}}.$$

Também observe que

$$f_r(0) = 0,$$

$$f_r(1) = e^{1-1^{-r}} = e^{1-1} = e^0 = 1,$$

$$f_r'(0) = r0^{-r-1}e^{1-0^{-r}} = r0e = 0,$$

$$f_r'(1) = r1^{-r-1}e^{1-1^{-r}} = re^0 = r.$$

Para $r, s > 0$, seja

$$g_{rs}(x) = \begin{cases} f_r(x), & se \quad x \in [0,1] \\ -f_s(-x), & se \quad x \in [-1,0]. \end{cases}$$

Cada g_{rs} é uma função de classe C^1 tal que

$$g_{rs}(0) = f_r(0) = 0,$$

$$g_{rs}(1) = f_r(1) = 1,$$

$$g_{rs}(-1) = -f_s(-(-1)) = -f_s(1) = -1,$$

$$g'_{rs}(-1) = [-f_s(-(-1))]' = f'_s(1) = s,$$

$$g'_{rs}(1) = [f_r(1)]' = f'_r(1) = r.$$

Em resumo, podemos encontrar uma função de classe C^1 em um intervalo qualquer tal que os valores e os valores de sua derivada em ambos os pontos das extremidades são quaisquer valores positivos dados.

Agora podemos aproximar qualquer homeomorfismo f da seguinte forma:

Dado um $\epsilon > 0$, escolhemos $n > 0$ tal que se $|x - y| < 1/n$, temos $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. (Isso é possível pois [0,1] é compacto, de modo que f é uniformemente contínua.) Particionando [0,1] em $2n$ intervalos de mesmo comprimento. Nos intervalos $[2k/2n, (2k+1)/2n]$, $0 \leq x \leq n-1$, aproximando f pelo segmento de reta $f(2k/2n)$ e $f((2k+1)/2n)$. Em outros intervalos, juntando os segmentos de reta por funções adequadas como definido acima para fazer a função de aproximação de classe C^1. Como f é uma função crescente, esta função de aproximação se encontra sempre próxima de f.

Problema 4.5. *Sejam $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ a sequência de funções definidas por*

$$f_0(x) = g(x) \quad e \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt,$$

$\forall x \in (0,1]$ e $n \geq 0$. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in (0,1]$.

Solução: Vejamos inicialmente que se g é um polinômio, o problema é fácil, pois temos que g se escreve da seguinte forma

$$g(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k.$$

Tomando

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)^n} x^k,$$

temos que todos os coeficientes, com exceção do independente, tendem a zero quando n é suficientemente grande.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = a_0 = g(0).$$

A idéia agora é tentar mostrar que isso também vale no caso de g não ser um polinômio. Para isso, vamos usar o Teorema de Aproximação de Weierstrass.

Dado $\epsilon > 0$, existe um polinômio P tal que

$$|P(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para todo x em [0,1] (pois g é contínua e [0,1] é compacto).

Agora olhe para a sequência $\widetilde{P}_n$ tal que

$$\widetilde{P}_{n+1} = \frac{1}{x} \int_0^x \widetilde{P}_n(t)dt \quad e \quad \widetilde{P}_0 = P.$$

Como P é um polinômio temos que

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{P}_n(x) = P(0),$$

donde, para n suficientemente grande, resulta que

$$|\widetilde{P}_n(x) - P(0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Além disso, temos que se

$$|\widetilde{P}_n(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

então

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{P}_{n+1}(x) - f_{n+1}(x)\right| &= \left|\frac{1}{x}\int_0^x \widetilde{P}_n(t)dt - \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\int_0^x \widetilde{P}_n(t)dt - \int_0^x f_n(t)dt\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\int_0^x [\widetilde{P}_n(t) - f_n(t)]dt\right| \\
&\leq \frac{1}{x}\int_0^x |\widetilde{P}_n(t) - f_n(t)|dt \\
&< \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\epsilon}{3}\, dt \\
&= \frac{1}{x}\frac{\epsilon}{3}\int_0^x dt \\
&= \frac{1}{x}\frac{\epsilon}{3}x \\
&= \frac{\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Segue por indução que

$$\left|\widetilde{P}_n(x) - f_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

para todo n natural e todo x em $(0, 1]$ já que

$$\left|\widetilde{P}_0(x) - f_0(x)\right| = |P(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass.

Agora segue-se que

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - g(0)| &= \left|f_n - \widetilde{P}_n(x) + \widetilde{P}_n(x) - P(0) + P(0) - g(0)\right| \\
&\leq \left|f_n(x) - \widetilde{P}_n(x)\right| + \left|\widetilde{P}_n(x) - P(0)\right| + |P(0) - g(0)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande, o que prova que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(0)$.

Referências Bibliográficas

[1] Boyer, C. B. **História da matemática**, 2^a edição, editora Edgard Blucher, São Paulo 1996.

[2] Domingues, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**, São Paulo, editora Atual, 1982.

[3] Lima, E. L. **Análise Real**, 13^a edição, Rio de Janeiro, editora IMPA, 2013.

[4] Lima, E. L. **Espaços Métricos**, 5^a edição, Rio de Janeiro, editora IMPA, 2013.

[5] Simmons, George F. **Introduction to Topology and Modern Analysis**, New York, McGraw-Hill, 1963.

[6] Souza, P. F. de; Silva, J. N. **Problem Book In Mathematics - Berkeley Problems in Mathematics**, Berkeley, Springer, 1998.

[7] DiBenedetto, E. **Real Analysis**, Boston, Birkhäuser, 2002.

[8] Tasca, F. A., **Teorema de Stone-Weierstrass para Espaços Localmente Compactos**, Monografia - Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

[9] Barboza, W. F. C., **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações**, Monografia - Departamento de Matemática, Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual a Paraíba, Campina Grande, 2014.

[10] Lima, O. A.; Maciel, A. B. **Introdução à Análise Real**, Campina Grande, EDUEPB, 2005.

Sites consultados

- $http://apprendre-math.info/anglais/historyDetail.htm?id=Stone$
- $http://www.learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Weierstrass$